Aufgabe 1

a) Elektrostatik:

Statik $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Elektro: nur elektrische Felder $\vec{E}, \vec{D}, \varphi, \rho$

Elektrostatik ist eine Näherung

z.B. Kapazität, Feldverteilung zwischen Leitern, ...

b) Material: Dielektrikum, Leiter

$$\text{Dielektrikum} \xrightarrow{} \varepsilon \Leftarrow \text{Wert wichtig}$$

$$\text{Leiter} \xrightarrow{} \kappa \leftarrow \text{Leiter? ja/nein}$$

d) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

skalares ε: isotropes Material

lineares Material

homogenes Material: keine Ortsabhängigkeit

c) $\text{rot}\, \vec{E} = \vec{0} \qquad \left(= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

$\text{div}\, \vec{D} = \rho \qquad \leftarrow$ Gaußsches Gesetz

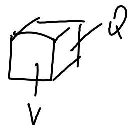
$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$$

e) ρ : Raumladungsdichte

σ : Flächenladungsdichte

q : Linienladungsdichte

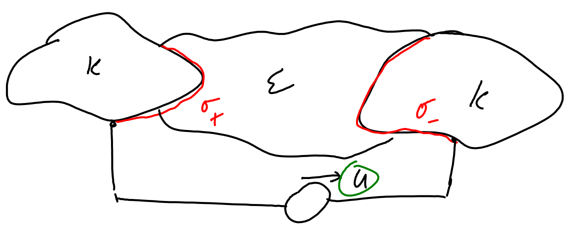
Q : Punktladung



$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

Ergänzung:

f) Elektrostatik in der Praxis



Praxis: U gegeben; $\rho, \sigma, \vec{E}, \varphi$ gesucht

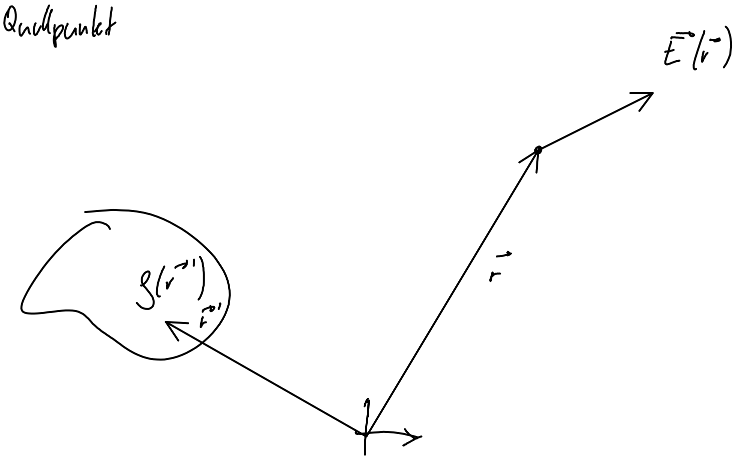
Rechnung: oft ρ, σ gegeben

Aufgabe 2

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \varrho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, dV'$$

$\vec{r}$: Aufpunkt

$\vec{r}\,'$: Quellpunkt



kartesische Koordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\varrho = (x', y', z')$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

kugelförmige Ladungsverteilung: $\rho = \rho_0 \frac{r}{r_0}$

$$\sigma(r_0) = \sigma_0$$

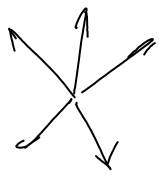
Koordinatensystem (wird festgelegt)

kartesische Koordinaten immer möglich, Rechnung (analytisch teilweise sehr schwierig)

hier: Kugelkoordinaten, Ursprung im Mittelpunkt der Kugel

$\Rightarrow \rho(r)$

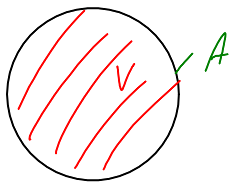
$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r$



$\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV = \oint_A \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

E-Feld auf einer Kugelschale konstant (Betrag)



gewählt: A Kugelschale mit r

$$\varepsilon_0 \oint_A E_r \vec{e}_r \cdot dA \, \vec{e}_r = \varepsilon_0 \oint_A E_r \, dA = \varepsilon_0 E_r \oint_A dA = \varepsilon_0 E_r \, 4\pi r^2$$

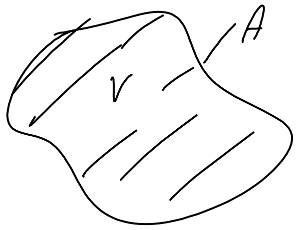
Aufgabe 3

$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r$ (Kugelkoordinaten, Ursprung im Mittelpunkt der Kugel)

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int_V \rho \, dV$$

gegeben

gesucht



$\vec{D}$ kann nur in wenigen Sonderfällen berechnet werden

A: Oberfläche einer Kugel mit Radius r, Mittelpunkt im Ursprung

$$A \Rightarrow \oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \oint_A \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_A \varepsilon_0 E_r(r)\,\vec{e}_r \cdot dA\,\vec{e}_r$$

$$= \varepsilon_0 \oint_{A \to r} E_r(r)\,dA = \varepsilon_0 \underbrace{E_r(r)}_{=\text{const.}} \oint_A dA = \varepsilon_0 E_r(r)\, 4\pi r^2$$

$0 < r < r_0$: (innerhalb der Kugel)

$$\int_V \rho \, dV = \int_V \rho_0 \frac{r}{r_0}\, dV = \int_0^r \rho_0 \frac{r'}{r_0} 4\pi r'^2\, dr'$$

$$= \frac{\rho_0}{r_0} \pi r^4$$

$$\Rightarrow E_r = \rho_0 \frac{r^2}{4\varepsilon_0 r_0}$$

$r_0 < r$ (außerhalb der Kugel)

$$\int_V \rho \, dV = \rho_0 \pi r_0^3 + + \sigma_0 4\pi r_0^2$$

$$E_r = \rho_0 \frac{r_0^3}{4\varepsilon_0 r^2} + \sigma_0 \frac{r_0^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

Aufgabe 4

Zylinderkoordinaten

Rechnung: Zylinder unendlich lang

Auswertung nur im mittleren Bereich sinnvoll, r klein

$\vec{D} = D_r(r)\,\vec{e}_r$

$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r$

A: Oberfläche Kreiszylinder mit Radius R

$d\vec{A}$: Mantelfläche: $dA\,\vec{e}_r \Rightarrow \vec{D}\cdot d\vec{A} = D_r\,dA$

Deckel: $dA\,\vec{e}_z \Rightarrow D\cdot d\vec{A} = 0$

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \oint_A \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 E_r\, 2\pi r \cdot l$$

↑ für die Rechnung

$$\int_V \rho\, dV = \int_0^r \rho \frac{r'}{r_0}\, 2\pi r'\, l\, dr'$$

$0 < r < r_0$:

$$\Rightarrow E_r = \frac{2}{3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \cdot r_0}\frac{l\pi r^3}{2\pi r\, l} = \rho_0 \frac{r^2}{3\varepsilon_0 \cdot r_0}$$

$r_0 < r$: $E_r = \rho_0 \frac{r_0^2}{3\varepsilon_0} + \sigma_0 \frac{r_0}{\varepsilon_0 r}$

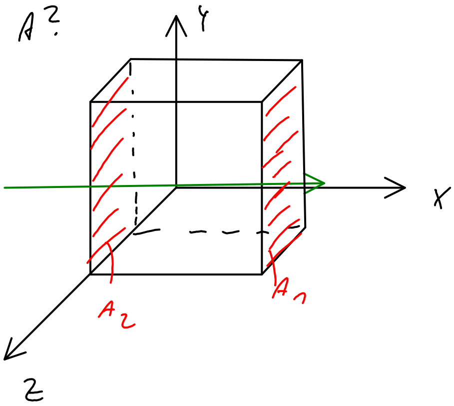
Aufgabe 5

gerade Platte $\Rightarrow$ unendliche Ausdehnung für die Rechnung

Auswertung nur im mittleren Bereich für kleine Abstände sinnvoll

$$\vec{E} = E_x(x)\,\vec{e}_x$$

A ?



$\vec{D}\cdot d\vec{A} = ?$

$\parallel \neq 0$

$$\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \int_{A_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \varepsilon_0 \int_{A_2} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \varepsilon_0 \int_{A_1} E_x(x_1)\, dA - \varepsilon_0 \int_{A_2} E_x(x_2)\, dA$$

$$= \varepsilon_0 E_x(x_1) A_1 - \varepsilon_0 E_x(x_2) A_2$$

$$\int_V \rho\, dV$$

$x_1 > a,\ x_2 > a$ oder $x_1 < 0,\ x_2 < 0$: $\int_V \rho\, dV = 0$

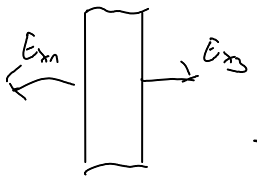
Quader außerhalb der Platte

$$\Rightarrow \cancel{\varepsilon_0} E_x(x_1) A_1 - \cancel{\varepsilon_0} E_x(x_2) A_2 = 0$$

$A_1 = A_2 \quad \Rightarrow E_x(x_1) = E_x(x_2)$

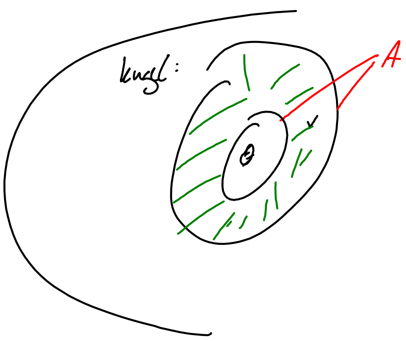
$\Rightarrow E_x = \text{const.}$ außerhalb der Platte

$\Rightarrow$ Abstand zu den Ladungen ist egal



$\Rightarrow E_{x_3} = -E_{x_1}$

Kugel:



$A \sim r^2$

$E_r \sim \frac{1}{r^2}$

$x_1 > a \quad , \quad x_2 < 0$

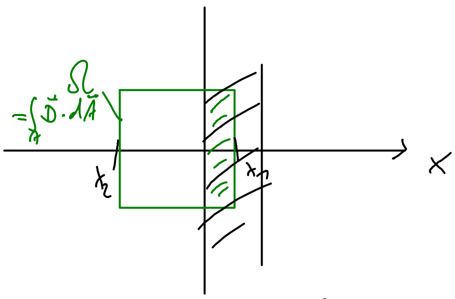
$$\int_V \rho \, dV = \sigma_0 A_x + \sigma_a A_x + A_x \int_0^a \rho_0 \frac{x}{a} dx$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \underbrace{(E_{x3} - E_{x1})}_{2E_{x3}} A_x \qquad A_x \equiv$$

$$\Rightarrow E_{x3} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 a}{4\varepsilon_0}$$

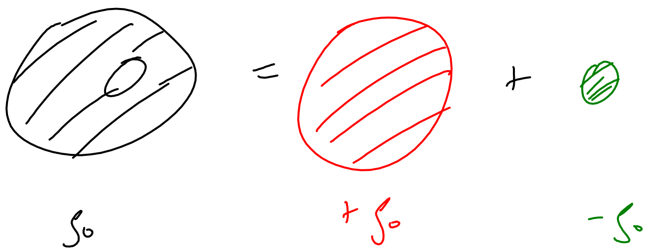
$$E_{x1} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 a}{4\varepsilon_0}$$

$x_2 < 0 \quad , \quad 0 < x_1 < a$



$$\Rightarrow E_{x2} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{2a\varepsilon_0}\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

Aufgabe 6



Addition von $\vec{E}$ nur in kartesischen Koordinaten

Aufgabe 7

a) Elektrostatik: $\vec{E}$ bzw. φ

$$\begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} \qquad \varphi(x,y,z)$$

$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \qquad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{0}$

Vorteil Rechnung mit φ: im Allgemeinen geringerer Rechenaufwand

$$\operatorname{grad} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

b) $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ → lineares, isotropes Dielektrikum

$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = -\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \rho$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$ → homogenes Dielektrikum

$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

c) $\Delta \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \sin\Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

d) φ gegeben

$\Rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

$\Rightarrow \vec{E}$ eindeutig bestimmt

e) $\vec{E}$ gegeben

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

muss festgelegt werden

Aufgabe 8

φ aus $\vec{E}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_B}) - \int_{\vec{r_B}}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

hier: 3D, Kugelsymmetrie

$\varphi(\vec{r_B})$: $\varphi(r \pm \infty) = 0$

$\vec{E}$: $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e_r}$

$\Rightarrow$ Weg in radialer Richtung $\Rightarrow$ $\vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,ds$

hier: 2 Gebiete: $0 < r < r_0$ und $r_0 < r < \infty$

$\vec{r_B}$ außerhalb der Kugel $\Rightarrow$ $\vec{r}$ zunächst auch außerhalb der Kugel

$$\vec{E} = \left(\varrho_0 \frac{r_0^3}{4\varepsilon_0 r^2} + \sigma_0 \frac{r_0^2}{\varepsilon_0 r^2}\right)\vec{e_r}$$

$r_0 < r < \infty$

$$\varphi(r) = 0 - \int_{\infty}^{r} \left(\varrho_0 \frac{r_0^3}{4\varepsilon_0 r'^2} + \sigma_0 \frac{r_0^2}{\varepsilon_0 r'^2}\right) dr' \longleftarrow !$$

$$= \varrho_0 \frac{r_0^3}{4\varepsilon_0 r} + \sigma_0 \frac{r_0^2}{\varepsilon_0 r}$$

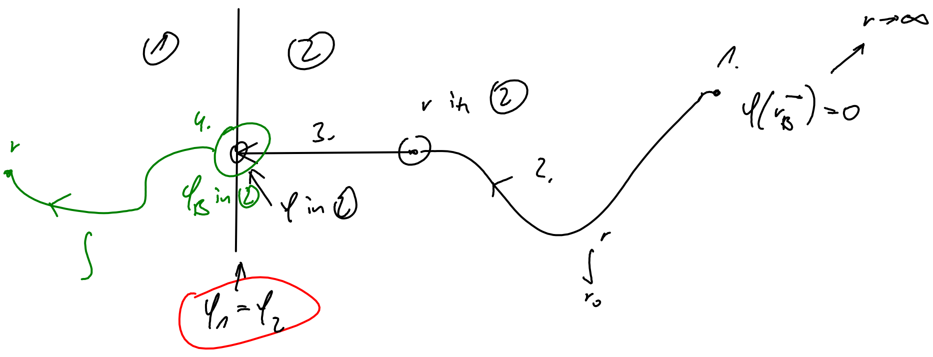
$\vec{E}$ $\longrightarrow$, $d\vec{s}$ $\longleftarrow$ $\Rightarrow$ $-$

$\int_{\infty}^{r}$ $\Rightarrow$ $-$

$0 < r < r_0$

$$\varphi(r) = \varrho_0 \frac{r_0^3}{4\varepsilon_0 r_0} + \sigma_0 \frac{r_0^2}{\varepsilon_0 r_0} - \int_{r_0}^{r} \varrho_0 \frac{r'^2}{4\varepsilon_0 r_0}\, dr'$$

$$= \varrho_0 \frac{r_0^2}{4\varepsilon_0} + \sigma_0 \frac{r_0}{\varepsilon_0} - \varrho_0 \frac{r^3 - r_0^3}{12\varepsilon_0 r_0}$$

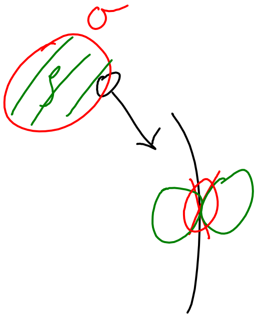


Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \overset{=0}{\cancel{\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}}} + \overset{=0}{\cancel{\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

hier: $\varphi = \varphi(r) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

$$\to \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad !!$$



$\rho, \sigma \Rightarrow$ ein Gebiet je $\rho(\vec{r})$, $\sigma \Rightarrow$ Gebietsgrenze

$0 < r < r_0$: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{r_0}$

$r_0 < r < \infty$: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$

Lösung der DGL:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r}{r_0}$$

$$\underset{\partial u}{\partial r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{r_0}\partial r$$

$$\underset{r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\cancel{u}} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^4}{4 r_0} + C_1$$

$$\partial \varphi = \left(-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{4 r_0} + \frac{C_1}{r^2}\right)\partial r$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{12 \varepsilon_0} - \frac{C_1}{r} + D_1 \\ \varphi_2 &= -\frac{C_2}{r} + D_2 \end{aligned}}$$

$C_1, D_1, C_2, D_2 \Rightarrow$ 4 Bestimmungsgleichungen

Randbedingungen am Gebietsübergang

$$\varphi_1(r=r_0) = \varphi_2(r=r_0)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r_0^3}{12 r_0} - \frac{C_1}{r_0} + D_1 = -\frac{C_2}{r_0} + D_2$$

$$D_{r2}(r=r_0) - D_{r1}(r=r_0) = \sigma_0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=r_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow -\frac{C_2}{r_0^2} - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r_0 + \frac{C_1}{r_0^2} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

Bemerkung: φ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ kann an einem Rand vorgegeben werden 18.12.2008

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

$$r \to \infty: \varphi_2(r \to \infty) = 0 \Rightarrow -\cancel{\frac{C_2}{\infty}} + D_2 = 0$$

$$r = 0: E_{r1}(r=0) = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\frac{0}{r_0}} - \frac{C_1}{0} = 0 \qquad (r \to 0)$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

$$-\frac{C_2}{r_0^2} - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow C_2 = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} r_0^2 - \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r_0^3$$

$$D_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} r_0 + \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r_0^2 + \frac{\rho_0}{12\varepsilon_0} r_0^2$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \dots$$
$$\varphi_2 = \dots$$

Aufgabe 3

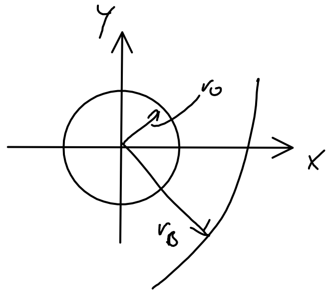
Zylinder, unendlich lang

$\Rightarrow$ 2D-Problem

Bezugspotenzial!

$\varphi_0 \Rightarrow$ Bezugspunkt mit endlichem Abstand zum Objekt

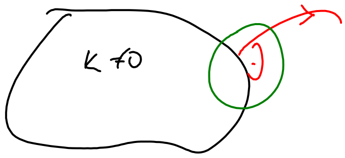
z.B. $\varphi(r_B) = 0$



nicht: $r_B \to \infty$

Aufgabe 11

a) Elektrostatik $\Rightarrow$ zeitunabhängige Felder, keine Ströme



Wert von κ egal

nur $\kappa = 0 \rightarrow$ Isolator

$\kappa \neq 0 \rightarrow$ Leiter

φ = const. im gesamten Leiter

$\Rightarrow \vec{E} = 0$ bzw. $\vec{J} = \kappa \vec{E} = \vec{0}$

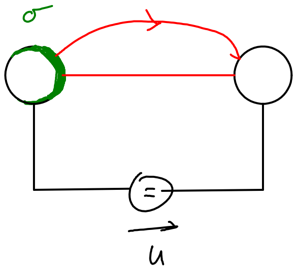
φ = const. an der Oberfläche $\Rightarrow \vec{E}_t = \vec{0}$ an der Oberfläche

$\Rightarrow \vec{E}$ senkrecht zur Oberfläche

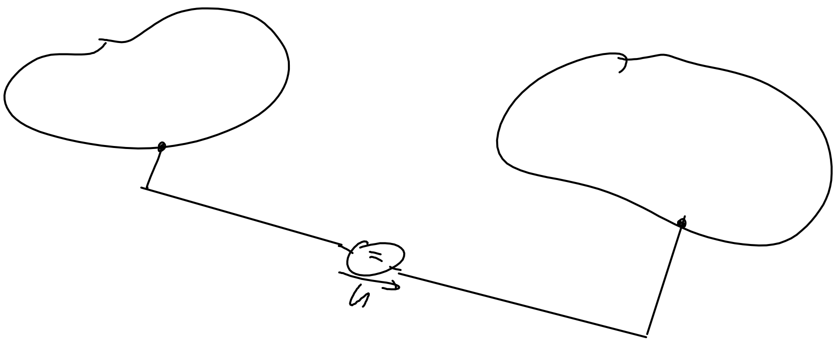
σ auf der Oberfläche

$D_n = \varepsilon E_n = \sigma$ im Allgemeinen nicht konstant auf der Oberfläche!!

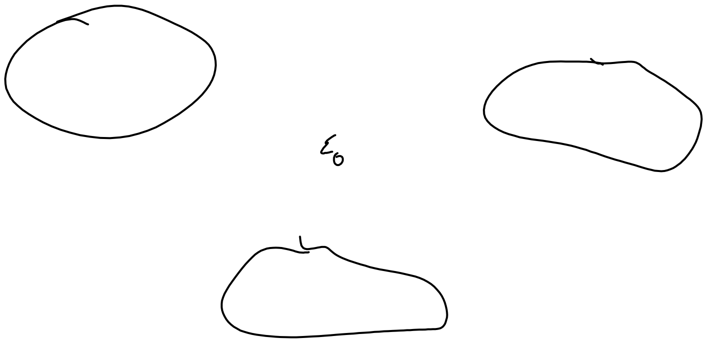
z.B.



b)



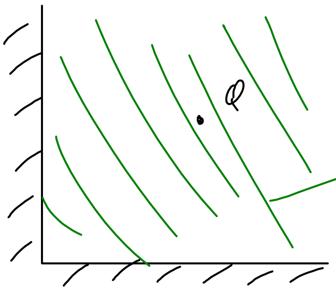
φ auf den Leitern kann vorgegeben werden c)



Kapazität C

hängt von der Geometrie und Materialverteilung ab

Aufgabe 12



Lösung mit der Bildladungsmethode / Spiegelungsmethode:

- "III" muss definiert werden
- "III" muss unverändert bleiben!

  $\operatorname{div} \vec{D} = \varsigma$ => Ladungen bleiben unverändert

  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ => Ströme bleiben unverändert

  ebenso: ε (κ, μ)
- Werte am Rand bleiben unverändert

  φ, E_0

=> richtiges Feld in III

Wichtige Lösung nur in III gültig

Vorgehensweise:

- Auswahl des betrachteten Gebiets

  hier: Luft im Winkel ($x > 0$ und $y > 0$)
- Aufgabenblatt: ε_0 im betrachteten Gebiet

  => im gesamten Raum nur 1 Material

  Material des betrachteten Gebiets

  => hier: überall $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\kappa = 0$

  => für die Rechnung nur 1 Gebiet
- Randbedingungen am Rand des betrachteten Gebiets

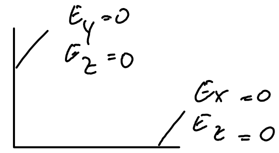
  => abhängig von der konkreten Aufgabe

  => Aufgabenblatt

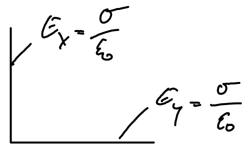
  hier: leitfähige Wände

  => $\varphi = \text{const.} = 0$

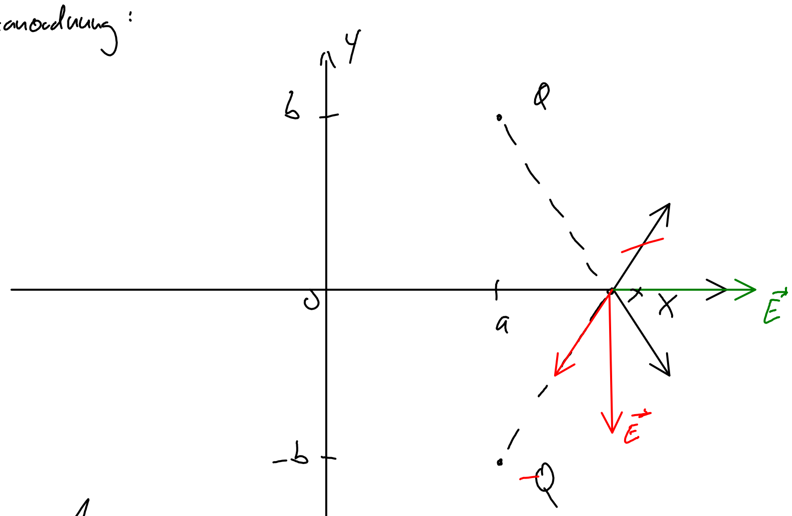
$E_t = 0 \Rightarrow$



$D_n = \varepsilon_0 E_n = \sigma$



Ersatzanordnung:



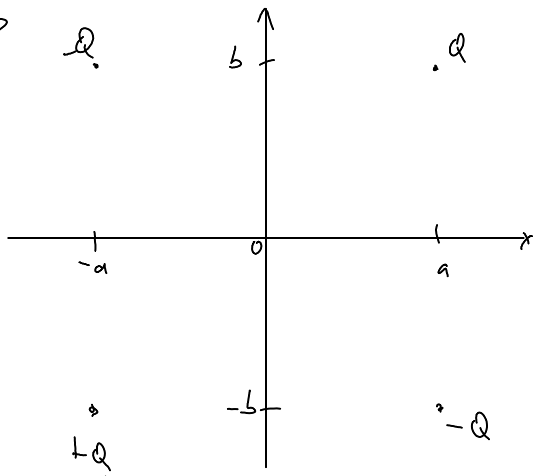
Q: $E \sim \frac{1}{r^2}$

gleicher Abstand zur Ebene $\Rightarrow$ gleicher Betrag der elektrischen Feldstärke in der Ebene

$\vec{E}$ am Rand für Ansatz $\rightarrow E_x \neq 0$, $E_y = 0$ falsch

neuer Versuch $\Rightarrow E_x = 0$, $E_y \neq 0$ ✓

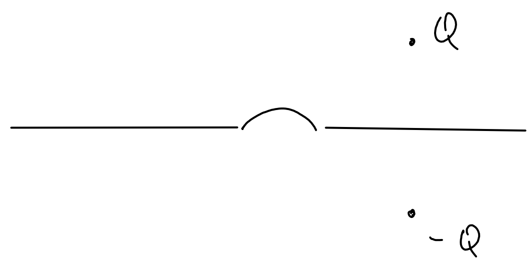
$\Rightarrow$



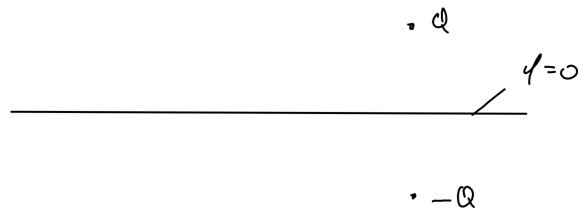
$\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i$

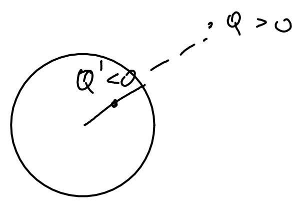
Aufgabe 13

Überlegungen wie in Aufgabe 12

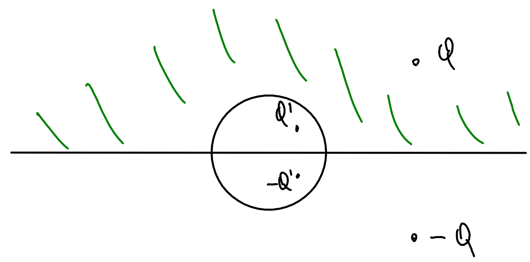


=>





=>



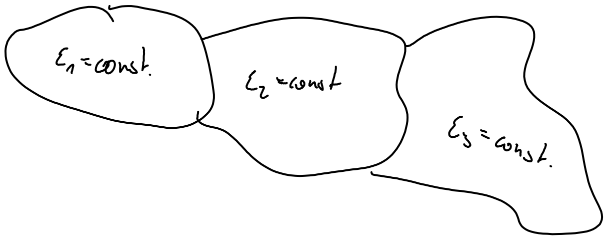
Aufgabe 15

a) homogen / inhomogen

inhomogen : $\varepsilon = \varepsilon(x,y,z)$

(homogen : $\varepsilon = const.$) Näherungsbetrachtung

häufig : stückweise homogen



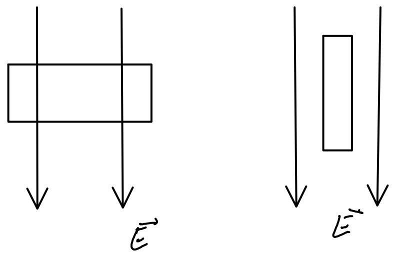
b) isotrop / anisotrop

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\Rightarrow D_x = \varepsilon E_x$

$D_y = \varepsilon E_y$ --> gleiche Richtung von $\vec{E}$ und $\vec{D}$

$D_z = \varepsilon E_z$



$\Rightarrow D = \varepsilon E$ $\qquad \Rightarrow D = \varepsilon E$ $\qquad$ isotrop

ε_1 $\qquad \varepsilon_2$ $\qquad$ anisotrop

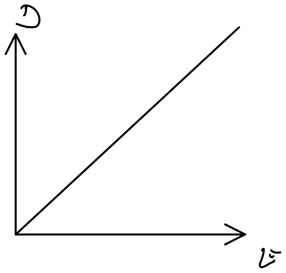
$D_x = \varepsilon_{xx} E_x$

$D_y = \varepsilon_{yy} E_y$

$D_z = \varepsilon_{zz} E_z$

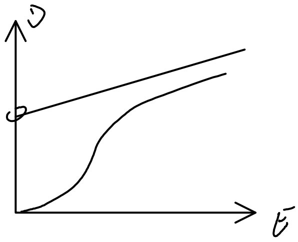
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \vec{E}$$

c) linear / nichtlinear

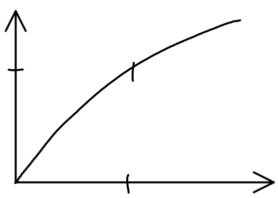


$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

nichtlinear:



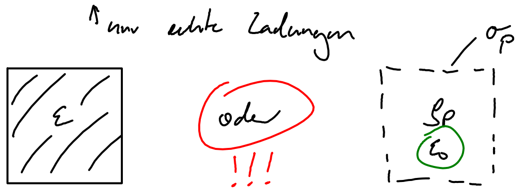
Bemerkung: Jedes Material ist nichtlinear. Für kleine Feldstärken kann eine lineare Näherung verwendet werden.



d) gebundene Ladungen / Polarisationsladungen
- keine „richtigen" Ladungen
- bei der Lösung eines Problems oft hilfreich

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

↑ nur echte Ladungen



Aufgabe 16

a) ideale Kondensator => kein Streufeld

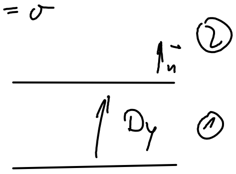
$\vec{E} = E_y \cdot \vec{e}_y$

$\uparrow$ const. im gesamten Kondensator

$U = -\int_d^0 (-E_y)\, dy = -E_y d \quad \Rightarrow E_y = -\frac{U}{d}$

$D_y = \varepsilon_0 E_y = -\varepsilon_0 \frac{U}{d}$

$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$



$0 - D_y = \sigma$

$\Rightarrow \sigma_0 = \varepsilon_0 \frac{U}{d}$

$\sigma_u = -\varepsilon_0 \frac{U}{d}$

b) $\varepsilon \neq \varepsilon_0$

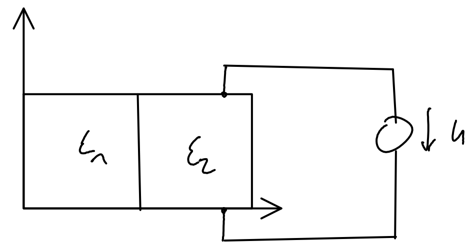
$\vec{E}$ wie in a)

$D_y = -\varepsilon \frac{U}{d}$ größer als in a)

$W = \int_V \vec{E} \cdot \vec{D}\, dV$ größer als in a)

$= \int_V E_y \cdot D_y\, dV$

d)



Elektrostatik => 1 Potenzial auf jeder Platte

$U = -\int_d^0 (-E_y)\, dy = -E_y d$

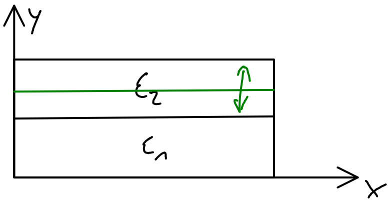
$U_1 = U_2 = U \quad \Rightarrow E_{y1} = E_{y2} = E_y = -\frac{U}{d}$

$D_{y1} = -\varepsilon_1 \frac{U}{d}$

$D_{y2} = -\varepsilon_2 \frac{U}{d}$

$\sigma_1 \neq \sigma_2$

c)



$$U = -E_{y1} d_1 - E_{y2} d_2$$

$$\Omega = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

zwischen den Platten keine Ladungen $\Rightarrow \Omega = \text{const.}$ für beliebiges y

$\vec{D}$ unabhängig von x

$$\Omega = A D_y \Rightarrow D_y = \text{const.}$$

$$U = -\frac{D_y}{\varepsilon_1} d_1 - \frac{D_y}{\varepsilon_2} d_2 = -D_y \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)$$

$$\Rightarrow D_y = -\frac{U}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

$$E_{y1} = -\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{U}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = -\frac{U}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}$$

$$E_{y2} = \dots$$

e) $\vec{P} = P_y \vec{e}_y$, $P_y > 0$

$\cancel{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$

$$E_y = -\frac{U}{d}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (kann immer verwendet werden)

$$D_y = \varepsilon_0 E_y + P_y = -\varepsilon_0 \frac{U}{d} + P_y$$

z.B. $P_y = \varepsilon_0 \frac{U}{d} \Rightarrow D_y = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

g) $U = 0 \Rightarrow E_y = 0$

$$D_y = P_y \neq 0$$

Aufgabe 17

$\varepsilon = 10\,\varepsilon_0 \frac{r}{r_i}$

isotrop, linear, inhomogen

Elektrostatik:

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \leftarrow$ freie Ladungen, „echte Ladungen"

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\uparrow$

Rechnung mit

ε	oder! Polarisationsladungen
– freie Ladungen auf Elektroden $\Rightarrow \sigma_i, \sigma_a$	– freie Ladungen σ_i, σ_a
– $\vec{D}$ aus σ_i, σ_a z.B. $\oint_A \vec{D}\cdot d\vec{A} = \int_V \rho\, dV$	– $\cancel{\varepsilon} \Rightarrow \sigma_P, \rho_P, \varepsilon_0$
– $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$	– $\vec{E}$ aus $\sigma_i, \sigma_a, \sigma_P, \rho_P$ z.B. $\oint_A \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_V \rho\, dV + \int_V \rho_P\, dV$
	– $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Kugelkondensator:

$\varphi(r_a) = 0$

$\varphi(r_i) = U \leftarrow$ gegeben

$\sigma(r_i) = \sigma_i$

$\sigma(r_a) = \sigma_a$

$r_i: \; Q = 4\pi r_i^2 \sigma_i$

$r_a: \; -Q = 4\pi r_a^2 \sigma_a \quad \Rightarrow \sigma_a = -\sigma_i \frac{r_i^2}{r_a^2}$

σ_i für Rechnung als bekannt angenommen

$(0 < r < r_i: \quad \vec{D} = \vec{0}, \; \vec{E} = \vec{0})$

$r_i < r < r_a: \quad \vec{E} = E\hat{e}_r, \; \vec{D} = D\hat{e}_r, \; D_r = \frac{4\pi r_i^2 \sigma_i}{4\pi r^2} = \frac{r_i^2 \sigma_i}{r^2}$

$(r_a < r: \quad \vec{D} = \vec{0}, \; \vec{E} = \vec{0})$

$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{r_i^2 \sigma_i}{10\,\varepsilon_0 \frac{r}{r_i} r^2} = \frac{r_i^3 \sigma_i}{10\,\varepsilon_0 r^3}$ $\quad D(\sigma_i)$, $E(\sigma_i)$

$U = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\sigma_i r_i^3}{10\,\varepsilon_0 r^3}\, dr = \frac{\sigma_i r_i^3}{20\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}\right) \Rightarrow \sigma_i = \ldots$

$\sigma_i(U)$

$\downarrow$

$D(U)$

$E(U)$

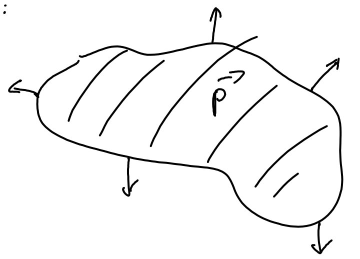
$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ $\qquad \vec{P} = P \vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow P = \frac{r_i^2 \sigma_i}{r^2} - \frac{r_i^3 \sigma_i}{10 r^3} = \left(1 - \frac{1}{10 \frac{r}{r_i}}\right) \frac{r_i^2 \sigma_i}{r^2}$

$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$

$\varrho_P = - \operatorname{div} \vec{P}$

σ_P:



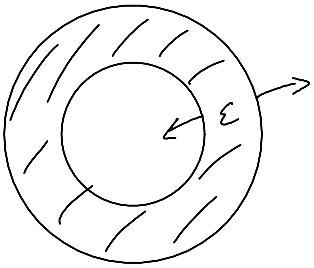
$\vec{P}$ auf der Oberfläche hier: $\vec{P}(r_i)$

$\vec{P}(r_a)$

$\vec{n}$ zeigt vom Material in Luft

$\sigma_{P_i} = \vec{P}(r_i) \cdot \vec{n}(r_i) = \left(1 - \frac{1}{10 \frac{r_i}{r_i}}\right) \frac{r_i^2}{r_i^2} \sigma_i \vec{e}_r \cdot (-\vec{e}_r)$

$\sigma_{P_a} = \vec{P}(r_a) \cdot \vec{n}(r_a) = \left(1 - \frac{1}{10 \frac{r_a}{r_i}}\right) \frac{r_i^2}{r_a^2} \sigma_i \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$



$\Rightarrow \sigma_{P_i} = - \frac{9}{10} \sigma_i$

$\sigma_{P_a} = \left(1 - \frac{1}{10 \frac{r_a}{r_i}}\right) \frac{r_i^2 \sigma_i}{r_a^2}$

$\varrho_P = - \operatorname{div} \vec{P} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 P = - \frac{1}{10 r^4} r_i^3 \sigma_i \neq 0$

inhomogenes Dielektrikum $\Rightarrow \varrho_P \neq 0$

lineares, homogenes Dielektrikum $\Rightarrow \varrho_P = 0$

$Q_P = \sigma_{P_i} 4\pi r_i^2 + \sigma_{P_a} 4\pi r_a^2 + \int_{r_i}^{r_a} \varrho_P \, 4\pi r^2 dr$

$V \qquad dV$

$rA \qquad dr$

$4\pi r^2$

$= 0$ immer

Berechnung von $\vec{E}$ aus allen Ladungen

$$\oint_A \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V (\rho + \rho_P)\, dV$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P}$$

$$\underline{\operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E}} = \operatorname{div} \vec{D} - \operatorname{div} \vec{P} = \underline{\rho + \rho_P}$$

$\operatorname{div} D = \rho$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E = 4\pi r_i^2 \sigma_i + 4\pi r_i^2 \sigma_{iP} + \int_{r_i}^{r} \rho_P(r')\, 4\pi r'^2\, dr'$$

$$\Rightarrow E = \frac{r_i^2}{r^2} \frac{\sigma_i + \sigma_{P_i}}{\varepsilon_0} + \frac{r_i^3 \sigma_i}{10 \varepsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} \right)$$

$\Delta \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ aus Formelsammlung

$\Delta \varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$ ← homogenes Dielektrikum

$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

$\operatorname{div} \varepsilon_0^{(-)} \operatorname{grad} \varphi = \overset{(-)}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$

$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = -\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = \rho$

$\operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varepsilon \Delta \varphi = -\rho = 0$

$r_i < r < r_a$: Dielektrikum $\Rightarrow \rho = 0$

$\Delta \varphi = -\dfrac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \varphi$

homogen: $\Delta \varphi = 0$

$\varphi(r_a) = 0, \quad \varphi(r_i) = U$

$\Rightarrow \varphi(r) =$

$$\left[\begin{aligned} -\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi &= \operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}) \\ &= \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \end{aligned} \right]$$

ε_0, ρ_P

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_P}{\varepsilon_0}$$

hier: $\rho_P = -\operatorname{div} \vec{P} = -\operatorname{div}(\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) = -\operatorname{div}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{D}$

$$= -\operatorname{grad}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \cdot \vec{D} - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \underbrace{\operatorname{div} \vec{D}}_{=0}$$

26.01.2009

Aufgabe 18

a) $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$

b) $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q U_{12}$

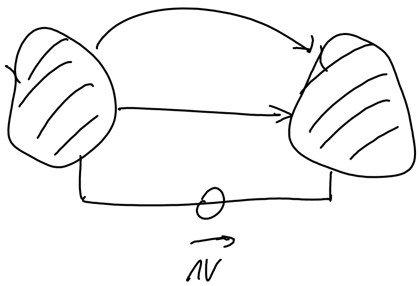
$\varphi(\vec{r}_1) = 0$

$W = Q\varphi$

c) & d) $W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}\,') \, \varphi(\vec{r}\,') \, dV'$

$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV$

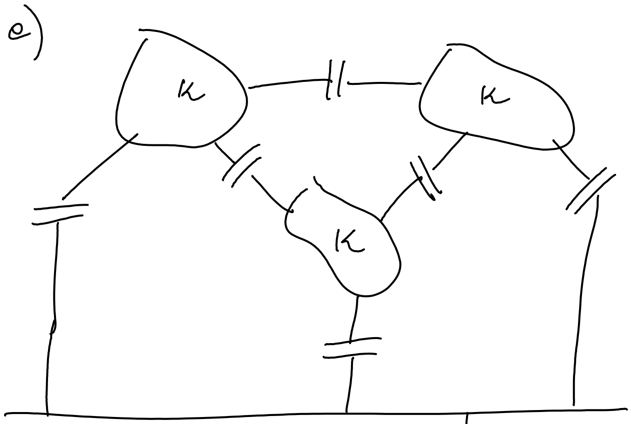
$W = \frac{1}{2} C U^2$



$W \Rightarrow C = \frac{2W}{U^2}$

12.02.2009

e)



$Q_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \varphi_j$ — Potenzial auf j

c_{ij}: Influenzkoeffizient

Q_i: Ladung auf i

z.B. $\varphi_1 = 1V, \ \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 0, \ \ldots$

$Q_1 = c_{11}\ 1V$

$Q_2 = c_{21}\ 1V$

$\vdots$

$\Rightarrow c_{ij}$

$\Rightarrow C_{ii} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$

$C_{ij} = -c_{ij}$

Randelement-
methode

Aufgabe 10

$C = \frac{|Q|}{|U|}$: Feldproblem, z.B. U gegeben, Q berechnen } Randelementmethode

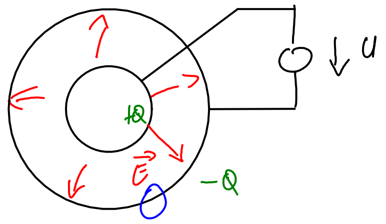
$W = \frac{1}{2} C U^2$, $W = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV$

$\downarrow$ Feldproblem, U gegeben, $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$ berechnet

$C = \ldots$

} Methode der finiten Elemente z.B. Comsol

Kräfte :



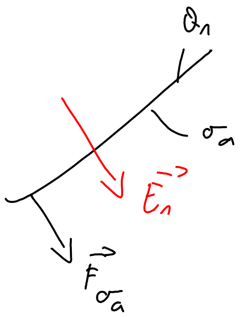
$+Q : \sigma_i$

$-Q : \sigma_a$

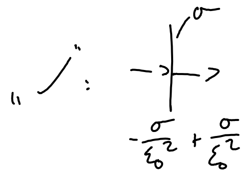
Freischneiden :

- Zeichnung nur mit betrachtetem Objekt
- äußere Kräfte und Felder einzeichnen

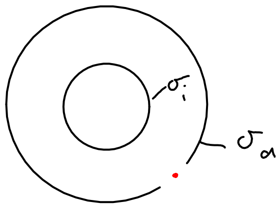
z.B.



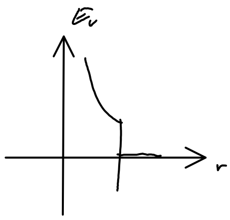
$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$



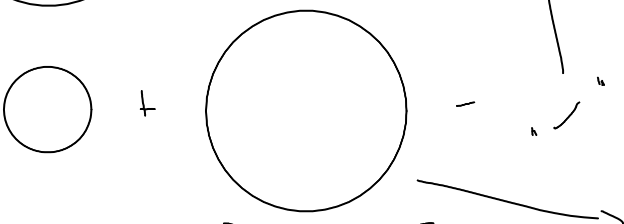
$\vec{E}_n$: $\cancel{\vec{E}_n = \vec{E}}$

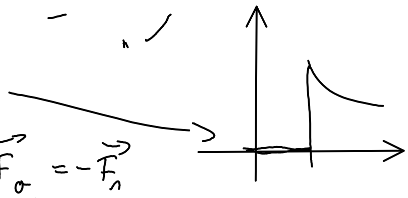


$\Rightarrow \vec{E}_n$



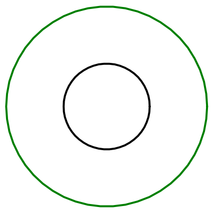
$\vec{E}_n$





$\vec{F}_n = Q_n \vec{E}_n = \sigma_a \, dA \, \vec{E}_n \Rightarrow \vec{F}_{\sigma_a} = -\vec{F}_n$

alternativ: virtuelle Verschiebung



Kraft zwischen σ_a und Elektrode soll berechnet werden

- Definition was berechnet werden soll
- betrachtetes Objekt wird verschoben/bewegt, hier: σ_a wird in radialer Richtung bewegt

=> dr, F_{rV}, dt

- mechanische Arbeit: $dW_m = F_{rV}\, dr$
- gesuchte Kraft: $F_r = -F_{rV}$
- Änderung der Energie im System aufgrund der Verschiebung
- angeschlossene Quellen berücksichtigen
- konstante Größen explizit aufschreiben

z.B. mit Spannungsquelle -> $U = const.$; Q ändert sich

$W_F = \frac{1}{2} C U^2$, $dW_F = \frac{1}{2} dC\, U^2$

Abmessungen ändern sich

$dW_u = U dQ$

- Energiebilanz

$dW_u + dW_m = dW_F$

$\rightarrow F_{rV} = -F_r = \ldots$

Aufgabe 20

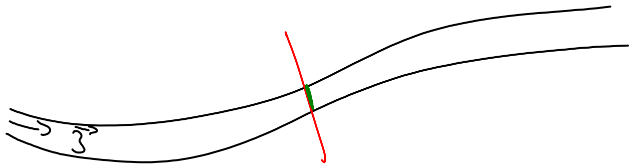
b) $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{d\varrho}{dt} = 0$ bzw. $\operatorname{div} \vec{j} = 0$

$\vec{j} = \kappa \vec{E}$

$\Delta \varphi = 0$, Randbed.: φ

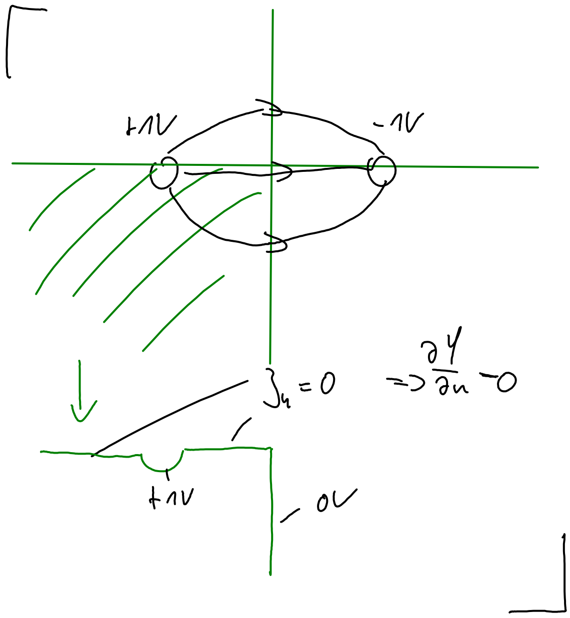
$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$

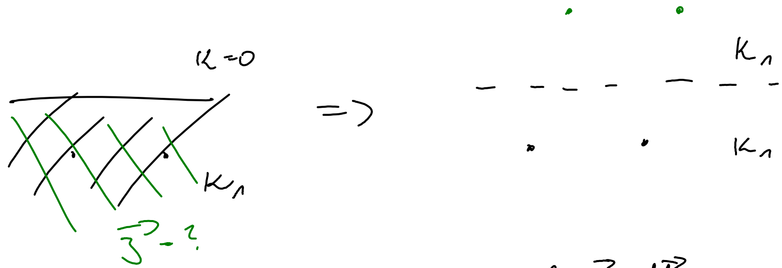
a) $I = \int_{A} \vec{j} \cdot d\vec{A}$



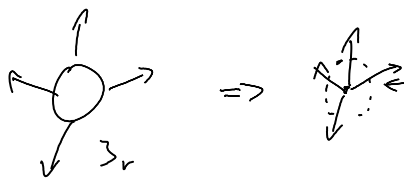
Aufgabe 11

Lösung mit der Spiegelungsmethode





$I = \int_A \vec J \cdot d\vec A$

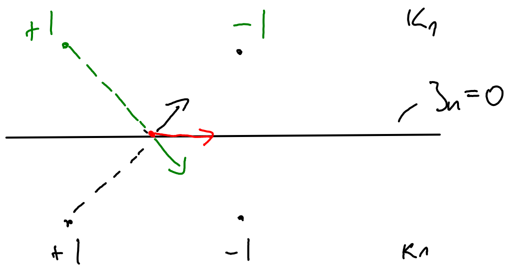


$\vec J = J_r \cdot \vec e_r$

$I = J_r \, 4\pi r^2$

$\Rightarrow J_r = \frac{1}{4\pi r^2}$

$\vec E = E_r \vec e_r \; , \; E_r = \frac{J_r}{\kappa_1} = \frac{1}{4\pi \kappa_1 r^2}$



J_x, J_y, J_z

$\rightarrow \vec J$ im Wasser

Hinweis: Bei der Berechnung der Spannung (Potenzial auf den Elektroden) muss der Radius der Elektroden berücksichtigt werden!

$\Rightarrow \vec{E} \Rightarrow \varphi \Rightarrow U$

$\uparrow$

$U(I)$

$\Rightarrow R$

$P = UI \qquad R = \frac{U}{I}$