

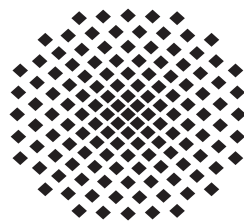
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 47
70569 Stuttgart

Mitschriften zur Vorlesung

HÖHERE MATHEMATIK II

bei Jörg Brüdern im SS 2008

Angefertigt von Jens Nitschke



**Universität
Stuttgart**

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Lineare Algebra | 1 |
| 3.5 | Endomorphismen und Determinanten | 1 |
| 3.5.6 | Die Determinante eines Endomorphismus | 1 |
| | Zwischenspiel von 3 nach 4: Lineare Dgl. mit konstanten Koeff. | 11 |
| 1. | Matrizenfunktion | 11 |
| 2. | Wege im | 14 |
| 3. | Lineare Differentialgleichungssysteme | 15 |
| 4. | Explizite Bestimmung von Fundamentalsystemen | 16 |
| 4 | Geometrie in und von Vektorräumen | 19 |
| 4.1 | Skalarprodukte (innere Produkte) | 19 |
| 4.2 | Orthogonale und unitäre Gruppe | 24 |
| 4.3 | Selbstadjungierter Endomorphismus | 29 |
| 4.4 | Quadriken (quadr. Gleichungen mit n Unbekannten) | 31 |
| 5 | Funktionen mehrerer Variabler | 47 |
| 5.1 | Stetigkeit | 47 |
| 5.2 | Aus der Topologie | 52 |
| 5.3 | Der Banach'sche Fixpunktsatz | 56 |
| 5.4 | Differenzialrechnung im \mathbb{R}^n | 58 |
| 5.5 | Mittelwertsatz und Taylor'sche Formel | 63 |
| 5.6 | Implizit gegebene Funktionen und Abbildungen | 66 |
| 5.7 | Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten | 70 |
| 6 | Mehrdimensionale Integration | 77 |
| 6.1 | Regelfunktion auf \mathbb{R}^n | 77 |
| 6.2 | Sukzessive Integration | 81 |
| 6.3 | Die Transformationsformel | 83 |
| 6.4 | Parameterintegrale | 85 |
| 6.5 | Uneigentliche Integrale | 86 |
| 6.6 | Das Lebesgue-Integral | 91 |
| 6.7 | Klassische Parameterintegrale | 96 |

3 Lineare Algebra

3.5 Endomorphismen und Determinanten

3.5.6 Die Determinante eines Endomorphismus

Wiederholung:

V sei K -Vektorraum ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

$\varphi : V \mapsto V$, linear ("Endomorphismus")

Frage: Kann in V eine Basis v_1, \dots, v_n gefunden werden, so dass die darstellende Matrix "diagonal" ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sei $A \in K^{n \times n}$ die darstellende Matrix zu φ zu einer Basis e_1, \dots, e_n .

$$\varphi(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{Bsp.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In Matrizen ist die Frage jetzt: gibt es $S \in K^{n \times n}$; $\det S \neq 0$

$$\text{mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} ? \quad (*)$$

Vorteile: $\vec{x} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{Gilt } (*), \text{ dann ist}$$

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S$$

$$A^k = S^{-1} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} S S^{-1} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} S \dots = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S$$

Sprechweisen: $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn es $S \in K^{n \times n}$ mit $\det S \neq 0$ und $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ gibt für geeignete $\lambda_j \in K$.

Ein Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ heißt diagonalisierbar, wenn bzgl. einer (und damit aller) Basis die darstellende Matrix diagonalisierbar ist.

Fragen: welche A sind diagonalisierbar? Was bedeuten die λ_j ?

Eigenwerte und Eigenvektoren: ist v_1, \dots, v_n eine Basis von V zu der φ eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat, dann gilt $\varphi(v_j) = \lambda_j v_j$.

Will man solche suchen, dann *suche* $\lambda \in K$ und $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\varphi(v) = \lambda v$

Definition: Sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von φ , wenn es $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ gibt mit $\varphi(v) = \lambda v$.

Geometrische Bedeutung: für $\lambda \neq 0$ wird die Gerade Kv von φ auf sich selbst abgebildet.

Def.: ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ und $v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v$, dann heißt v Eigenvektor (EV) von φ .

Seien v_1, v_2 EV zum *selben* EW λ . Dann $\varphi(v_1 \pm v_2) = \varphi(v_1) \pm \varphi(v_2)$.

$\text{Eig}(\lambda) = \{v \in V : \text{Eigenvektoren zu } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}$, ist UVR von V und heißt **Eigenraum** zu λ .

Sätzchen: φ ist diagonalisierbar \Leftrightarrow es gibt eine Basis aus EV zu φ .

Ist φ diagonalisierbar, dann sind die Diagonaleinträge EW von φ .

Berechnen der Eigenwerte: gesucht sind $\lambda \in K$ mit $\varphi(v) = \lambda v$ lösbar mit $v \neq 0$.
 $(\varphi - \lambda \text{id})v = 0$

SATZ. $\lambda \in K$ ist EW zu $\varphi \Leftrightarrow \det(\varphi - \lambda \text{id}) = 0$.

Wähle *eine* beliebige Basis von V . Sei A die darstellende Matrix.

$$\det(\varphi - \lambda \text{id}) = \det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Polynom in λ , Grad n .

Heißt charakteristisches Polynom von φ ; in Zeichen $p_\varphi(\lambda)$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2$

”doppelte Nullstelle” $\lambda = 1$.

Allgemeiner: sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine ”obere Dreiecksmatrix”.

Dann sind $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ die Eigenwerte von A .

SATZ. Sei V ein n -dimensionaler K -VR und $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, der n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat.

Dann ist φ diagonalisierbar.

Die Begründung liefert ein Verfahren, welches auch eine Basis aus EV auffindet. Induktion über n : Ind.-Anf.: $n = 1$, jede Matrix ist diagonalisierbar.

Sei jetzt $n \geq 2$ und v_j EV zum EW λ_j .

Zeige: v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.

Falls $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ ($\alpha_j \in K$)

Wäre etwa $\alpha_1 \neq 0$, dann ist

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \dots + \alpha_n \varphi(v_n)$$

$$0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n v_n$$

Nur verträglich für $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Finde die $v_j : (A - \lambda_j E_n)v_j = 0$

Wiederholung:

Sei stets V ein n -dim. VR, $\varphi : V \rightarrow V$ Endomorphismen dargestellt durch eine $n \times n$ -Matrix A (nach Wahl einer Basis)

Gibt es $v \in V \setminus \{0\}$, $\lambda \in K$ mit $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$, dann heißt λ EW von φ und v EV zu λ .

Idee: EW und EV sind "charakteristisch" für φ , helfen insbesondere, die *Geometrie* von φ zu verstehen.

$p_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda \text{id}) = \det(A - \lambda E_n)$ heißt charakteristisches Polynom.

λ ist EW $\Leftrightarrow p_\varphi(\lambda) = 0$

Eigenvektoren werden aus $(\varphi - \lambda \text{id})v = 0$ bestimmt, nenne Lösungsmenge

$\text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id}) = \text{Eig}(\lambda) \quad \frac{\text{Eigenraum}}{\text{zu } \lambda}$

Diagonalisierung. Welche φ lassen sich zu einer geeigneten Basis durch eine Diagonalmatrix beschreiben? Solche φ heißen **diagonalisierbar**.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

SATZ. φ diagonalisierbar \Leftrightarrow es gibt eine Basis aus EV von φ .

Einträge der Diagonalmatrix sind die EW.

φ ist höchstens dann diagonalisierbar, wenn $p_\varphi(\lambda)$ mit Vielfachheit n Nullstellen hat, d.h.

$$p_\varphi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

SATZ. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ verschiedene EW von φ und v_j EV zu λ_j , dann sind v_1, v_2, \dots, v_r linear unabhängig. Hat φ n verschiedene EW, dann ist φ diagonalisierbar.

Beispiel 1: $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\varphi(x, y, z) = (-y + z, -3x - 2y + 3z, -2x - 2y + 3z)$$

$$\text{Matrix zur Standard-Basis ist } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_\varphi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Eigenwerte $\lambda = 1$ (doppelt), $\lambda = -1$.

-1 ist einfacher EW, v_1, v_2 EV dazu, lin. unabhängig.

v_1, v_2, w Basis

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & * \\ 0 & -1-\lambda & * \\ 0 & 0 & *-\lambda \end{pmatrix}$$

LEMMA. Hat das char. Polynom p_φ bei λ eine k -fache Nullstelle, dann gilt $\dim \text{Eig}(\lambda) \leq k$

Eigenraum zu $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bleibt nur $x_3 - x_2 - x_1 = 0$, Basis zu $\text{Eig}(1)$ ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$. Rechne dazu EV aus: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$\text{Eig}(-1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Darstellende Matrix von φ zur Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Nachrechnen mit "Basiswechsel". Transformationsmatrix für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

...

Beispiel 2: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

1 ist doppelter Eigenwert.

$\text{Eig}(1) = \text{Kern}\{\vec{x} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\} = \{2x_2 = 0\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\dim \text{Eig}(1) = 1$; also ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

nicht diagonalisierbar, obwohl das char. Polynom 2 Nullstellen (eine "doppelte") hat.

Erinnerung: ein Polynom $p(x)$ hat "in x_0 eine k -fache Nullstelle", wenn $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$

mit einem Polynom q ist, aber nicht mit $k + 1$.

Das ist dasselbe wie $p(x_0) = p'(x_0) = \dots = p^{(k+1)}(x_0) = 0$, $p^{(k)}(x_0) \neq 0$,

Begründung für Hilfssatz: $r = \dim \text{Eig}(\lambda)$; Basis v_1, \dots, v_r davon.

Ergänze zu Basis von V , durch w_{r+1}, \dots, w_n .

Matrix dazu:

$$n \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & ? & ? \\ 0 & \lambda & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \underbrace{\quad\quad\quad}_r & 0 & ? & ? \end{pmatrix}$$

$p(t) = \text{Matrix 2}$

SATZ. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ Endomorphismus eines n -dim. VR's V . Es gilt: φ ist diagonalisierbar genau dann, wenn gleichzeitig

(i) $p_\varphi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$

(ii) $\dim \text{Eig}(\lambda_j) = \text{Vielfachheit von } \lambda_j$

denn: $\sum \dim \text{Eig}(\lambda) = n \Leftrightarrow \dim \text{Eig}(\lambda_j) = \text{Vielfachheit}$

Trigonalisierung. Wenn Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ gegeben ist, dann betrachte $\varphi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$

Versuche $\varphi_{\mathbb{C}}$ über \mathbb{C} zu diagonalisieren. Ergebnis kann auch über \mathbb{R}^n benutzt werden.

Vorteil: p_φ hat stets n komplexe Nullstellen.

Nachteil: (ii) i.a. nicht erfüllt, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat auch über \mathbb{C} nur $\dim \text{Eig}(1) = 1$

Matrix $3 \in M^{n \times n}(K)$ heißt **obere** Dreiecksmatrix.

Sei A so eine. Dann $p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^n (a_{jj} - \lambda)$

SATZ. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ Endomorphismus eines K -VR's V . Dann sind äquivalent:

(i) p_φ hat n Nullstellen (in K) (mit Vielfachheit)

- (ii) φ ist trigonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis von V , zu der die darstellende Matrix Oberdreiecksmatrix ist.

Folgerung: über \mathbb{C} ist *jeder* Endomorphismus trigonalisierbar.

Verfahren zur Trigonalisierung:

- (1) Wähle einen EW, λ_1 , bestimme dazu EV v_1 . Ergänze zu Basis von V durch w_2, \dots, w_n .

Matrix aufstellen: Matrix 4

B kann aufgefasst werden als lin. Abb. auf $W = Kw_2 + \dots + Kw_n$

$$p_\varphi(t) = (t - \lambda_1)p_B(t)$$

Jordan-Normalform.

Matrix 5

Wiederholung:

Trigonalisierung: Sei V ein n -dimensionaler K -VR, $\varphi : V \rightarrow V$ linear. Genau dann gibt es eine Basis von V , zu der φ durch eine obere Dreiecksmatrix !!!Matrix 6!!! dargestellt wird, wenn $p_\varphi(t) = \det(\varphi - t \text{id})$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$p_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\dots(\lambda_n - t)$$

(Über \mathbb{C} geht das immer; in \mathbb{R} nimm Umweg über \mathbb{C} ; über anderen Körpern lässt sich das ähnlich erzwingen)

Die Jordan'sche Normalform

Idee: wähle eine obere Dreiecksmatrix mit möglichst wenig Einträgen.

$$J(r, \lambda) = \text{Matrix 7} \in M^{r \times r}(K)$$

"Jordan-Kasten"

Potenzen von $J(r, \lambda)$ sind "leicht"

Einschub!!

SATZ. (Jordan-Normalform $\hat{=}$ JNF). Sei $\varphi : V \rightarrow V$ Endomorphismus eines n -dim. K -VR's, $p_\varphi(t)$ habe n Nullstellen (mit Vielfachheit). Dann gibt es $s \in \mathbb{N}$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, so dass zu einer geeigneten Basis die Matrix zu φ die Gestalt

Matrix 8

Hinweise:

- (i) diagonalisierbar ist $\varphi \Leftrightarrow$ alle $r_j = 1$. Dann ist die JNF die Diagonalmatrix.
- (ii) die vorkommenden Jordan-Kästen sind eindeutig bestimmt, *nicht* ihre Reihenfolge.
- (iii) Jeder Eigenwert steht so oft auf der Diagonalen, wie die Vielfachheit der Nullstelle von p_φ . Das kann mehrere $J(r, \lambda)$ bedeuten (mit demselben λ).
- (iv) Manchmal lässt sich die JNF "erraten"

Beispiel: $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zur Standardbasis $p_\varphi(t) = (1-t)^3$; 1 dreifacher EW.

Kandidaten für die JNF:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \text{ Matrix 9, } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix};$$

$$\dim \text{Eig}(1) = 3 \quad = 2 \quad = 1$$

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & 0 \\ & \ddots & & 2 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - E_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Eig}(1) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $\dim = 1$. Es *muss* also eine Basis v_1, v_2, v_3 des \mathbb{R}^3 geben mit

$$\text{darst. Matrix } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = v_1$$

$$\varphi(v_2) = v_1 + v_2$$

$$\varphi(v_3) = v_2 + v_3$$

Wähle $v_1 = (1, 0, 0)$

$$\text{Ansatz: } v_2 = (x, y, z) \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+2z \\ z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1+x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z=0, y=1}$$

$$\Rightarrow v_2 = (x, 1, 0)$$

$$v_3 = (a, b, c)$$

$$\varphi(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b \\ b+2c \\ c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x+a \\ 1+b \\ c \end{pmatrix} \quad c = \frac{1}{2}, b = x$$

$$\Rightarrow v_3 = (a, x, \frac{1}{2}) \Rightarrow x = a = 1$$

Verfahren bei $\dim \text{Eig}(\lambda) = 2$, im \mathbb{R}^3 , 3-facher EW λ .

JNF: Matrix 10

Angenommen, \vec{f}_1, \vec{f}_2 seien Basis von $\text{Eig}(1)$.

Ansatz: $\vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{f}_1 + \alpha_2 \vec{f}_2$; mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ frei. Suche \vec{v}_3 mit $\varphi(v_2) = v_2 \checkmark$ und $\varphi(v_3) = v_2 + v_3$.

Sind v_2 und v_3 berechnet, dann ist mindestens einer von \vec{f}_1, \vec{f}_2 zu \vec{v}_2 lin. unabhängig; diesen nenne \vec{v}_1 ; v_1, v_2, v_3 sind die gesuchte Basis.

Mit diesen Tricks lässt sich JNF immer dann bestimmen, wenn es nur einen EW gibt, also

$$p_\varphi(t) = (\lambda - t)^n$$

Der allgemeine Fall kann auf diese Situation zurückgeführt werden.

Idee: "Haupträume"

$$\text{Eig}(\lambda) = \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\} = \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id})$$

$$= \{\vec{x} : (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id})^s = H(\lambda), \text{ ist VR, heißt } \mathbf{Hauptraum} \text{ zu } \lambda.$$

SATZ (Hauptraumzerlegung). Sei V ein n -dim. K -VR, $\varphi : V \rightarrow V$ linear

$$\text{mit } p_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} (\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_s - t)^{r_s}$$

mit $r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$ und paarw. verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Dann gilt: $\dim H(\lambda_j) = r_j$, $\varphi(H(\lambda_j)) \subset H(\lambda_j)$ für alle j .

Wähle Basen $w_l^{(j)}$; $1 \leq l \leq r_j$ von H_j . Diese zusammen bilden Basis von V .

Die Matrix zu dieser Basis hat die Form

Matrix 11

Jetzt in jedem Hauptraum den ersten Teil der heutigen Vorlesung anwenden.

Zwischenspiel von 3 nach 4: Lineare Dgl. mit konstanten Koeff.

1. Matrizenfunktion

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$A^0 = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad A, \quad A^2 = AA, \dots, A^k$$

Sei $p(t) = c_k t^k + \dots + c_1 t + c_0 : c_l \in \mathbb{C}$

$$p(A) := c_k A^k + \dots + c_1 A + c_0 E_n.$$

SATZ. (Cayley-Hamilton)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und p_A das charakteristische Polynom dazu. Dann gilt

$$p_A(A) = (0) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Idee: v EV zum EW λ von A .

$$p_A(t) = c_n t^n + \dots + c_0$$

$$p(A)v = c_n A^n v + \dots + c_0 E_n v = c_n \lambda^n \vec{v} + c_{n-1} \lambda^{n-1} \vec{v} + \dots + c_0 \vec{v} = p_A(\lambda) \vec{v}$$

Ist A diagonalisierbar, ist das schon ein Beweis.

Effekt vom Basiswechsel:

Basiswechsel ändert A zu $S^{-1}AS$ mit $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$.

$$A^k \quad (S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^k S$$

$$\boxed{p(S^{-1}AS) = S^{-1}p(A)S}$$

Definition: (Matrizenexponentialfunktion).

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}. \text{ Dann sei } \exp(A) = E_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Gemeint ist dies wie folgt:

$$\text{Zu jedem } K \text{ bilde } \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!}A^k = X_K \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\text{Ist } X_K = (x_{ij}^{(K)})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ dann ist } \exp A = \left(\lim_{K \rightarrow \infty} x_{ij}^{(K)} \right)_{i, j}$$

Behauptung: dies ist für *jede* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konvergent.

Allgemeiner: Matrizen in Potenzreihen einsetzen!

”Matrizennorm”. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ $\|A\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2}$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$

LEMMA. (Übung). $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, dann gelten $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$; $\|A\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\|$

SATZ 2. Sei $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ eine Potenzreihe mit $c_l \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $r > 0$. Sei

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\|A\| < r$. Dann konvergiert die Matrizenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ in jedem Eintrag absolut.

Idee: Majoranten-Kriterium: $|a_{ij}| \leq \|A\|$ $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

$\sum |c_k| \|A^k\| \leq \sum |c_k| \|A\|^k$, konvergente Majorante für jede Komponente

Anwendung: Näherungsberechnung von A^{-1}

Für $|t| < 1$ ist $(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

Nach Satz 2 ist für $\|A\| < 1$

$$(E_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^K A^k + F; \quad \|F\| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \|A\|^k = \|A\|^{K+1} \frac{1}{1-\|A\|}$$

Ist $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, schreibe $B = E_n - A$

Basiswechsel: LEMMA. Sei f wie Satz 2 und $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$.

$$f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$$

$$\text{denn: } p_K(t) = \sum_{k=0}^K c_k t^k \quad p_K(S^{-1}AS) = S^{-1}p_K(A)S$$

Komponentenweise $K \rightarrow \infty$.

Zur Übung siehe man/frau sich an, wie $\sin A$, $\cos A$ usw. aussehen!

LEMMA 2. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$. Dann gilt

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B$$

$$\text{Idee: } \exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^{k-l} B^l$$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$\exp A \exp B = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \frac{1}{l!} B^l \quad (\text{wie bei exp für "Zahlen"})$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Für Polynome p ist also $p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$

LEMMA 3. Sei f wie in Satz 2, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\|D\| < r$.

Dann gilt $f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

Insbesondere gilt

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Folgerung: A diagonalisierbar, $\|A\| < r$. Dann wähle S mit $S^{-1}AS = D$ diag.,

$$f(A) = f(SDS^{-1}) = S f(D) S^{-1} = S^{-1} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S$$

Wiederholung:

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \quad A^2 = \left(\begin{array}{c|c} B^2 & 0 \\ \hline 0 & C^2 \end{array} \right)$$

$B \in \mathbb{C}^{r \times r}; C \in \mathbb{C}^{(n-r) \times (n-r)}$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp B & 0 \\ \hline 0 & \exp C \end{array} \right)$$

Insbesondere gilt für eine Matrix in JNF

Matrix 12

(verallgemeinert die Formel $\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp^{\lambda_n} \end{pmatrix}$)

Mit dieser Formel kann durch Basiswechsel stets $\exp A$ berechnet werden, wenn $\exp(J(r, \lambda))$ bekannt ist, denn wenn

$S^{-1}AS$ in JNF ist, dann ist

$$S^{-1}(\exp A)S = \exp(\text{Jordan-NF})$$

$\exp(J(r, \lambda))$ kommt gleich! (\rightarrow (4))

2. Wege im \mathbb{R}^n

$\vec{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n : I \subset \mathbb{R}$ Intervall;

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Solche Abb. heißen **Wege** (Kurve).

Ein Weg $\vec{x}(t)$ heißt stetig, bzw. differenzierbar, stetig differenzierbar etc., wenn dies für *alle* $x_j(t)$ ($1 \leq j \leq n$) gilt.

Beispiel 1:

$$\vec{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t)$$

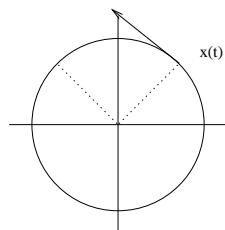
Die Menge $\text{spur}(\vec{x}(t)) = \{\vec{x}(t) : t \in I\}$ ist das "Bild" des Weges; "vergisst die Zeit"

Sei jetzt $\vec{x}(t)$ ein diffb. Weg;

$$\vec{x}'(t) := (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

heißt Ableitung von \vec{x} nach t .

In Beispiel 1 ist $\vec{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$



Beispiel 2:

$$\vec{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x(t) = (t^2, t^3)$$

$$x_1 = t^2, \quad x_2 = t^3$$

$$\sqrt{x_1} = t = \sqrt[3]{x_2}$$

Bild 2

$$x'(t) = (2t, 3t^2)$$

Bemerkung: Ist $\vec{x}(t)$ diffbar mit $\vec{x}'(t_0) \neq \vec{0}$, dann ist $\vec{x}'(t)$ ein "Tangentenvektor" an die Spur. Physikalisch ist $\vec{x}'(t)$ ein Geschwindigkeitsvektor.

Bild 3

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \vec{x}'(t)$$

3. Lineare Differentialgleichungssysteme

Erinnerung: $y'(t) = y(t)$ hat als Lösung genau $y(t) = ce^t$

Lösungsmenge: 1-dim VR.

"zeitabhängige Matrizen" $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ sind Wege von einem Intervall $I \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$;

"diffb. Matrix" $\Leftrightarrow a_{i,j}(t)$ alle diffb.

Ein homogenes, lineares Dgl.-System ist gegeben durch $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$

Ausgeschrieben sind das n Dgl. 1. Ordnung:

$$y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + \dots + a_{1n}(t)y_n(t)$$

\vdots

$$y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + \dots + a_{nn}(t)y_n(t)$$

Eine **Lösung** des Dgl.-Systems ist ein diffb. Weg $\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)$.

Die Lösungen bilden einen VR.

Sind $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ Lösungen, dann ist $\vec{z}(t) = \vec{x}(t) - \vec{y}(t)$ auch eine Lösung, denn

$$\vec{z}'(t) = \vec{x}'(t) - \vec{y}'(t) = A(t)\vec{x}(t) - A(t)\vec{y}(t) = A(t)\vec{z}(t)$$

SATZ 2. Sei $A(t)$ ein stetiger Weg in $\mathbb{C}^{n \times n}$. Dann hat der Lösungsraum

$$L = \{\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ stetig diffb.}; \vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t)\}$$

Dimension n . Die Abbildung

$$\mathbb{C}^n \rightarrow L; \vec{z} \mapsto \vec{y}(t) \text{ mit } \vec{y}(0) = \vec{z}$$

ist ein Isomorphismus (linear, bijektiv)

(Beweis in HM3)

Ziel: ist A konstant (unabhängig von der Zeit), dann kann L explizit angegeben werden!

Glossar: Elemente von L heißen Lösungen.

Basen von L heißen Fundamentalsysteme.

Ist $A(t) = A$ für alle t , heißt $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ lineares homogenes Dgl.-System mit konstantem Koeff.

Bemerkung: eine gewöhnliche Dgl. n -ter Ordnung, linear, konstante Koeff., ist eine Gleichung

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j y^{(j)}(t)$$

$$y''(t) = ay'(t) + by(t)$$

Dieses Dgl.-System 1. Ordnung für $\begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$

Wiederholung:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Gesucht sind diffb. Funktionen $y_1, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

mit $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ (lineares Dgl-System 1. Ordnung, homogen, mit konstanten Koeffizienten)

In diesem Problem enthalten sind Dgl. n -ter Ordnung folgenden Typs

$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, n -mal diffb., $y^{(n)}(t) = c_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + c_1y'(t) + c_0y(t)$

$$\begin{pmatrix} y^{(0)}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(0)}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: eine Dgl n -ter Ordnung $y^{(n)} = c_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + c_0y(t)$ ist äquivalent zum System

$$\vec{y}' = C\vec{y} \text{ mit } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & \dots & \dots & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

4. Explizite Bestimmung von Fundamentalsystemen

Gegeben $\vec{y}' = A\vec{y}$; L = Menge der Lösungen; ist BR der Dim. n .

Angenommen, wir hätten eine Basis gefunden: $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$:

Fasse dies als Spalten einer Matrix auf: $Y(t) = (\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t))$

$$\boxed{Y'(t) = (\vec{y}'_1(t), \dots, \vec{y}'_n(t)) = AY(t)}$$

Jedes Fundamentalsystem löst diese "Matrizen-Dgl."; Matrizen, die diese lösen, enthalten als Spalten Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$

Beispiel: $n = 1$. $A = (\lambda) : y' = \lambda y$; z.B. ist $y(t) = e^{\lambda t}$ Lösung, $L = \{ce^{\lambda t}; c \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C})\}$
Betrachte $Y(t) = \exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$; $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Zeige: $Y'(t) \stackrel{!}{=} A \exp(tA) = AY(t)$ und $\exp(tA)$ ist *invertierbar*.

SATZ 3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$; Dann ist durch die Spalten von $\exp(tA)$ eine Basis des Lösungsraums von $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$ gegeben.

Begründungen:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^k & p'(x) &= kx^{k-1} \\ \frac{d}{dt}p(tA) &= \frac{d}{dt}(tA)^k = \left(\frac{d}{dt}t^k\right)A^k = kt^{k-1}A^k = Ap'(tA) \end{aligned}$$

(formal die Kettenregel!)

$$\begin{aligned} p(x) &= c_k x^k + \dots + c_0 \\ \frac{d}{dt}p(tA) &= Ap'(tA) \end{aligned}$$

Deshalb gilt auch $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$

denn $\exp(tA) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (tA)^l$, und Potenzreihen können gliedweise differenziert werden!

Erinnerung: $AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp A \exp B$

$E_n = \exp(tA - tA) = \exp(tA) \exp(-tA)$, also $\exp(tA)$ invertierbar, Inverses ist $\exp(-tA)$.

5. Explizite Berechnung von $\exp(tA)$

Einsatz der JNF. Gegeben A . Dann gibt es $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det S \neq 0$, so dass $S^{-1}AS$ in JNF ist.
 $\exp(tA) = SS^{-1} \exp(tA) SS^{-1} = S \exp(t(S^{-1}AS)) S^{-1}$

Ist

$$(S^{-1}AS) = \text{Matrix 13}$$

Es bleibt also nur noch für $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\exp(tJ(r, \lambda))$$

zu berechnen.

Erinnerung: $J(r, \lambda) = \text{Matrix } 14 = \lambda E_r + N_r$; $N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$$N_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, N_r^{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \exp(tJ(r, \lambda)) &= \exp(t\lambda E_r + tN_r) \\ &= \exp(t\lambda E_r) \exp(tN_r) \\ &= e^{t\lambda} E_r \exp(tN_r) \\ &= e^{t\lambda} (E_r + tN_r + \frac{t^2}{2} N_r^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} N_r^{r-1}) \end{aligned}$$

$$= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: JNF mit Basiswechsel herstellen. Dann kann das Fundamentalsystem explizit ausgerechnet werden.

Tipp: Löse $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ **explizit.**

Reelle Fundamentalsysteme: ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann hat $\vec{y}' = A\vec{y}$ auch einen n -dim. reellen Lösungsraum.

Treten dabei echt komplexe EW, $\lambda \notin \mathbb{R}$; dann ist mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein EW. Addiere bzw. subtrahiere die Lsg. mit $e^{\lambda t}$, $e^{\bar{\lambda}t}$; das liefert zwei reelle Lösungen.

4 Geometrie in und von Vektorräumen

4.1 Skalarprodukte (innere Produkte)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} : V sei ein \mathbb{K} -VR (beliebig)

Erinnerung: auf \mathbb{R}^n war $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

ist in \vec{x}, \vec{y} linear; $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$;

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$; $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ nur für $\vec{x} = 0$.

Def.: Sei V ein \mathbb{K} -VR. Eine Abbildung

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R} : v, w \mapsto \langle v, w \rangle$$

heißt **Skalarprodukt**, wenn gelten:

(i) Für jedes $w \in V$ ist $v \mapsto \langle v, w \rangle$ linear

(ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V$

(iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$; und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Beispiel 1: das gewöhnliche Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum x_i \bar{y}_i$$

ist Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n

Beispiel 2: $l^2 = \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} : x_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^2 \text{ konvergent}\}$

wegen Cauchy-Schwarz konvergiert

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_k \text{ für } \vec{x}, \vec{y} \in l^2$$

Ist Skalarprodukt!

Beispiel 3: $L^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \text{ existiere}\};$

$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ existiert, hat Eigenschaften des Skalarprodukts.

Wiederholung:

Skalarprodukte: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ; V sei \mathbb{K} -VR. Eine Abbildung $\langle ; \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften

(i) Für alle $w \in V$ ist $v \mapsto \langle v, w \rangle$ linear

Beispiel:

$$\begin{aligned}\langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in V \\ \langle \lambda v, w \rangle &= \lambda \langle v, w \rangle \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

(ii) $\forall v, w \in V$ ist $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\langle v, w_1 + w_2 \rangle &= \overline{\langle w_1 + w_2, v \rangle} = \overline{\langle w_1, v \rangle + \langle w_2, v \rangle} = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle \\ \langle v, \lambda w \rangle &= \overline{\langle \lambda w, v \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle} = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle \quad (\text{semilinear})\end{aligned}$$

Warnung: manche Autoren haben semilineare 1. Komponente und lineare 2. Komponente!

(iii) $\forall v \in V$ ist $\langle v, v \rangle \geq 0$; aus $\langle v, v \rangle = 0$ folgt $v = 0$.

heißt **Skalarprodukt** auf V .

Beispiel: auf \mathbb{K}^n ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{r=1}^n x_r \bar{y}_r$ Skalarprodukt, auf

$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \text{ ex.}\}$ ist durch

$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt gegeben.

Fragen: 1. Andere "interessante" Skalarprodukte? Was nutzen sie? \rightarrow Dgl.'s lösen, z.B. Schwingungsgleichung.

Wie sieht man an einer quadratischen Gleichung.

...

Sei $\langle ; \rangle$ ein Skalarprodukt ($\hat{=}$ inneres Produkt)

Dazu erkläre $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ("Norm von v ").

$\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty)$ mit

(i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(iii) folgt aus

SATZ 1. (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Bei *jedem* Skalarprodukt auf einen \mathbb{K} -VR V gilt für alle $v, w \in V$ die Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

Beweis: $\lambda \in \mathbb{K}$. Ist $w = 0$ sind beide Seiten 0. Also $w \neq 0$.

$$0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle \lambda w, \lambda w \rangle + \langle v, \lambda w \rangle + \langle \lambda w, v \rangle$$

$$= \|v\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 + \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \lambda \langle w, v \rangle$$

$$\lambda = \frac{-\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \Rightarrow 0 \leq \|v\|^2 + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, v \rangle$$

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}$$

$$0 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle v, w \rangle|^2$$

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

Zu-Satz 1: $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ genau dann, wenn v, w linear abh. sind.

Es gilt $\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\langle v, w \rangle$ (Satz des Pythagoras)

Dreiecks-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

Parallelogrammgleichung: $v, w \in V$

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

Gibt es andere, "interessante" Skalarprodukte?

Idee 1. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

Auf \mathbb{K}^n setze

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\vec{a}} = \sum a_\nu x_\nu \bar{y}_\nu$$

dies ist Skalarprodukt, wenn alle $a_\nu > 0$, sonst *nicht*.

Idee 2: Sei V ein n -dim. \mathbb{K} -VR und $v_1, \dots, v_n \in V$ Basis.

Ist auf \mathbb{K}^n ein Skalarprodukt $\langle ; \rangle$ gegeben, dann lässt sich dazu ein Skalarprodukt $\langle ; \rangle_V$ konstruieren: $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ mit $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$; $\vec{x} = \vec{x}(v)$ "Koordinaten"

$$\langle v, w \rangle_V := \langle \vec{x}(v), \vec{x}(w) \rangle (*)$$

Ist linear, weil $\vec{x}(v)$ linear; Symmetrie; $\langle v, v \rangle_V \geq 0$; $\langle v, v \rangle_V = 0 \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$,

also $\vec{x} = 0 \Rightarrow v = 0$

Dieselbe Rechnung zeigt: ist auf V ein Skalarprodukt gegeben, dann kann daraus nach Wahl der Basis v_1, \dots, v_n durch (*) ein Skalarprodukt auf K^n definiert werden.

Bei endl.-dim. VR reicht es, *alle* Skalarprodukte auf K^n zu klassifizieren.

Ansatz: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{\nu=1}^n x_\nu \bar{y}_\nu$. Sei $A \in K^{n \times n}$. Betrachte $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t \vec{x}(A\vec{y}) = \langle \vec{x}; A\vec{y} \rangle$

Es gilt $b(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = b(\vec{x}_1, \vec{y}) + b(\vec{x}_2, \vec{y})$; $b(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda b(\vec{x}, \vec{y})$

Ist $K = \mathbb{R}$, $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t \vec{x}A\vec{y} = {}^t(\vec{x}A\vec{y}) = {}^t \vec{y} {}^t A \vec{x} = {}^t \vec{y} A \vec{x} \stackrel{{}^t A = A}{=} {}^t \vec{y} A \vec{x} = b(\vec{y}, \vec{x})$

Definition: eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit ${}^t A = A$ heißt symmetrisch. Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit ${}^t A = \bar{A}$ heißt Hermite'sch.

Zusammenfassung: Eine Abbildung $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ heißt bilinear, wenn für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ die Abb. $\vec{x} \mapsto b(\vec{x}, \vec{y})$ und für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Abb. $\vec{y} \mapsto b(\vec{x}, \vec{y})$ linear sind. Jedes solche b hat genau eine Darstellung $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t \vec{x}A\vec{y}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. (das wurde nur zur Hälfte gezeigt! Rest Übung!). b ist symmetrisch, d.h. $b(\vec{x}, \vec{y}) = b(\vec{y}, \vec{x}) \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$ symmetrisch.

Analog: auf \mathbb{C}^n betrachte Abb. $b : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die $\vec{x} \mapsto b(\vec{x}, \vec{y})$ linear haben, und $\vec{y} \mapsto b(\vec{x}, \vec{y})$ mit + vertauscht, aber $b(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \bar{\lambda} b(\vec{x}, \vec{y})$ (Sesquilinearform).

Gilt $b(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{b(\vec{y}, \vec{x})}$, dann heißt b Hermite'sch.

b ist Hermite'sch $\Leftrightarrow b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t \vec{x}A\vec{y}$ mit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermite'sch.

Bild 4

Eine symmetr. Bilinearform $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem \mathbb{R} -VR V ist eine Abb. mit:

$v \mapsto b(v, w)$ linear für alle $w \in V$

$b(v, w) = b(w, v)$

SATZ 3.

(i) zu jeder symmetrischen Bilinearform auf \mathbb{R}^n gibt es eine symmetr. Matrix ($\Leftrightarrow {}^t A = A$) mit $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t \vec{x}A\vec{y}$

(ii) ist V ein n -dim. \mathbb{R} -VR und $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetr. Bilinearform und ist v_1, \dots, v_n eine Basis, dann sei $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$, dann gilt $b(v, w) = {}^t \vec{x}B\vec{y}$ mit $B = (b(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

(iii) Ist $v_1^*, \dots, v_n^* \in V$ eine weitere Basis und ist S die Matrix des Basiswechsels $\vec{x}^* = S\vec{x}$,

dann gilt

$${}^t\vec{x}B\vec{y} = {}^t(S^{-1}\vec{x}^*)B(S^{-1}\vec{x}^*) = {}^t\vec{x}^*({}^tS^{-1}BS^{-1})\vec{x}^*$$

$$\boxed{B^* = {}^tS^{-1}BS^{-1}} \text{ mit } B^* = (b(v_i^*, v_j^*))_{1 \leq i, j \leq n}$$

(iii) heißt "Basiswechsel" oder "Transformationsformel" für symmetr. Bilinearformen

Eine Hermite'sche Form $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem \mathbb{C} -VR V ist eine Abb. mit:

$v \mapsto b(v, w)$ linear für alle $w \in V$

$$b(v, w) = b(w, v)$$

SATZ 3'.

(i) zu jeder Hermite'schen Form auf \mathbb{C}^n gibt es eine Hermite'sche Matrix A

$$(\Leftrightarrow {}^tA = \bar{A}) \text{ mit } b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x}A\vec{y}$$

(ii) Ist V ein n -dim. \mathbb{C} -VR und $b : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ Hermite'sche Form und ist v_1, \dots, v_n eine

Basis, dann sei $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$, $w = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$

dann gilt $b(v, w) = {}^t\vec{x}B\vec{y}$ mit $B = (b(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

(iii) Ist $v_1^*, \dots, v_n^* \in V$ eine weitere Basis und ist S die Matrix des Basiswechsels $\vec{x}^* = S\vec{x}$, dann gilt

$$\boxed{B^* = {}^tS^{-1}B\bar{S}^{-1}} \text{ mit } B^* = (b(v_i^*, v_j^*))_{1 \leq i, j \leq n}$$

(iii) heißt "Basiswechsel" oder "Transformationsformel" für Hermite'sche Bilinearformen

Experiment:

$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ symmetr. Bilinearform; $b(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x}A\vec{y}$, ${}^tA = A$

Ist $A = (a_{i,j})$, dann

$$\begin{aligned} b(\vec{x}, \vec{x}) &= {}^t\vec{x}A\vec{x} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}x_ix_j \\ &= a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

Wenn es eine Basis gibt, zu der die Matrix zu b Diagonalmatrix ist, dann wird $b(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$

Ziel: Das geht immer ("Hauptachsensatz")

Def.: sei $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ symmetr. bzw. Hermite'sch. Dann heißt $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$

$Q(v) = b(v, v)$ die b zugeordnete **quadratische Form**

Bemerkung: aus Q kann b rekonstruiert werden. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} Q(v+w) - Q(v-w) &= b(v+w, v+w) - b(v-w, v-w) \\ &= Q(v) + Q(w) + 2b(v, w) - (Q(v) + Q(w) - 2b(v, w)) \\ &= 4b(v, w) \end{aligned}$$

SATZ 4. (Polarisierung)

$$b(v, w) = \frac{1}{4}(Q(v+w) - Q(v-w)) \text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

Das geht auch über \mathbb{C} ; betrachte $Q(v+w) - Q(v-w) + Q(v+iw) - Q(v-iw)$

Übung!

4.2 Orthogonale und unitäre Gruppe

Gegeben: \mathbb{K} -VR V (beliebige Dimension), mit Skalarprodukt

$$\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

Def.:

$v, w \in V$ heißen orthogonal, wenn $\langle v, w \rangle = 0$

In Zeichen: $v \perp w$

Konstruktion:

sei $W \subset V$ ein UVR

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in W\}$$

heißt orthogonales Komplement von W ; ist ebenfalls UVR

Für jedes w ist

$$U_w = \{v : \langle v, w \rangle = 0\} = \text{Kern}\{v \mapsto \langle v, w \rangle\}$$

ist UVR

$$W^\perp = \bigcap_{w \in W} U_w$$

und V ist die direkte Summe von W und W^\perp

(das heißt z.B., dass die Vereinigung von Basen von W und W^\perp eine Basis von V ist)

$\vec{e}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ Gewöhnliches Skalarprodukt:

$$\langle \vec{e}_j, \vec{e}_k \rangle = \begin{pmatrix} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{pmatrix} =: \delta_{jk} \text{ (Kronecker-Delta)}$$

Allgemein:

eine Basis $(v_j)_{j \in J}$ eines \mathbb{K} -VR V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt **orthonormal**, wenn

$$\langle v_j, v_j \rangle = 1 \quad \forall j \in J \text{ und}$$

$$\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k \in J \text{ gelten}$$

ORTHONORMALISIERUNGSSATZ:

Sei V ein \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt und eine Menge von Vektoren $\{v_k : k \in K\}$ mit $\|v_k\| = 1 \quad \forall k \in K$ und $\langle v_j, v_k \rangle = 0 \quad \forall j \neq k$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V , die diese Menge enthaelt.

Folgerung: wähle ein $v \in V$, $v \neq 0$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{v}{\|v\|} \text{ hat Länge } 1$$

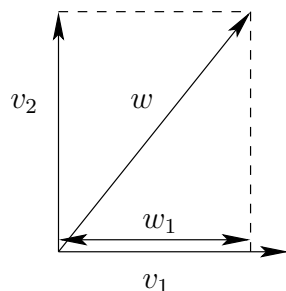
wende Satz an: \exists Orthonormalbasis, die v_1 enthält

\Rightarrow jeder \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt hat Orthonormalbasis (ONB)

Wie findet man eine ONB? ("Gram-Schmidt-Orthonormalisierung")

Wähle $v_1 \in V$ mit $\|v_1\| = 1$

Ist $\dim V \geq 2$, dann gibt es w , der von v linear unabh. ist.



Setze $w_1 = \langle w, v_1 \rangle v_1$

$$v_2 := w - w_1; \quad \langle v_2, v_1 \rangle = \langle w, v_1 \rangle - \langle w_1, v_1 \rangle = \langle w, v_1 \rangle - \langle w, v_1 \rangle \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

Ersetze jetzt v_2 durch $\frac{v_2}{\|v_2\|}$

Allgemeiner:

sind $v_1, \dots, v_k \in V$ mit $\|v_j\| = 1$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$ und ist dies noch keine Basis, dann wähle $w \in V$ linear unabh. von den v_j

$$\text{Setze } w_k = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle w, v_k \rangle v_k$$

Dann steht $w - w_k$ senkrecht auf allen v_j .

Bei endl. Dimension führt dies in endl. vielen Schritten auf ONB.

$V = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist \mathbb{R} -VR, dort ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle \text{ ein Skalarprodukt}$$

Untersuche, ob $\sin(kt), \cos(kt)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ orthogonal sind

SATZ (ohne Beweis)

Eine stetige Abb. des \mathbb{R}^n , die weder Längen noch Winkel verändert, ist **linear**.

Definition:

Sei V \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt, ein Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$
 heißt $\begin{pmatrix} \text{orthogonal} & (\text{wenn } \mathbb{K} = \mathbb{R}) \\ \text{unitär} & (\text{wenn } \mathbb{K} = \mathbb{C}) \end{pmatrix}$, wenn gilt $\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$

Ist $\dim V < \infty$, dann ist jedes solche φ invertierbar; also ist für $\dim V < \infty$

$O(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \text{ orthogonal}\}$, $U(V) = \{\varphi : V \rightarrow V \text{ unitär}\}$ jeweils eine Gruppe "orthogonale" und "unitäre" Gruppe

Wiederholung:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ; V \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt.

$\varphi : V \rightarrow V$ linear. φ heißt orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) \ unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), wenn $\forall v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle$

SATZ 1. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt:

φ ist orth \ unitär $\Leftrightarrow \|v\| = \|\varphi(v)\| \forall v \in V$

denn: $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle \Rightarrow$ trivial \Leftarrow "Polarisierung"

SATZ 2. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ orth \ unitär.

Dann gelten:

(i) Ist λ EW von φ , dann $|\lambda| = 1$.

(ii) φ ist injektiv

(iii) Ist $\dim V < \infty$, dann ist φ invertierbar und φ^{-1} orth \ unitär.

v EV: $\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$; $\text{Kern}(\varphi) = \{0\}$

Von jetzt an: $\dim V = n < \infty$. Ziel: verstehe Matrizen, die zu orthogonalen bzw. unitären Abb. gehören.

Definition: Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. A heißt orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) \ unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), wenn gilt ${}^t A = \bar{A}^{-1}$.

$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal}\}$ "Gruppe der orthogonalen Matrizen"

$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ "spezielle orthogonale Gruppe"

$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A \text{ unitär}\}$ "unitäre Gruppe"

SATZ 3. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Äquivalent sind:

- (1) A orth\unitär
- (2) die Spalten sind eine ONB
- (3) die Zeilen sind eine ONB

Beweis: A orth\unitär $\Leftrightarrow {}^t \bar{A} = A^{-1}$

$$\Leftrightarrow {}^t \bar{A} A = E_n$$

$$A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \text{ mit Spalten } \vec{a}_j$$

$$\Leftrightarrow {}^t \bar{a}_i \vec{a}_j = \langle \vec{a}_j, \vec{a}_i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

SATZ 4. Sei V ein n -dim. \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt, v_1, \dots, v_n sei eine ONB von V . Sei $\varphi : V \rightarrow V$ linear und A die darstellende Matrix zu v_1, \dots, v_n . Dann gilt φ orth\unitär $\Leftrightarrow A$ ist orth\unitär.

Beweis: $v, w \in V$; $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$; $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$

$$\langle v, w \rangle_V = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle_V = \sum_{i,j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle v_i, v_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{K}^n}$$

Das zeigt

$$\langle v, w \rangle = {}^t \vec{x} \vec{y} = {}^t \vec{x} E_n \vec{y}$$

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = {}^t (A \vec{x}) \overline{(A \vec{y})} = {}^t \vec{x} ({}^t A \bar{A}) \vec{y}$$

$$\text{Also: } \langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \quad \forall v, w \Leftrightarrow {}^t \vec{x} E_n \vec{y} = {}^t \vec{x} ({}^t A \bar{A}) \vec{y}$$

$$\Leftrightarrow {}^t A \bar{A} = E_n \Leftrightarrow {}^t A = \bar{A}^{-1} \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$$

SATZ 5. Sei V ein V -VR mit Skalarprodukt und $\varphi : V \rightarrow V$ unitär.

Dann gibt es eine ONB aus EV von φ .

(mit anderen Worten) Es gibt eine Basis v_1, \dots, v_n , ONB, und die darstellende Matrix von φ

hat die Form $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $|\lambda_j| = 1$.

Insbesondere ist φ diagonalisierbar. Ist speziell $\varphi = \varphi_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$; $\vec{x} \mapsto A \vec{x}$ mit $A \in U(n)$.

Wähle $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ nach Satz 5. $S = (v_1, \dots, v_n)$

$$S \text{ unitär nach Satz 3. } {}^t \bar{S} A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis Satz 5. Induktion über $n = \dim V$. $n = 1$ ✓

$n \geq 2$. Über \mathbb{C} hat's EW; sei λ einer; v EV; $\|v\| = 1$.

Die Elemente von $SO(n)$ ($A \in O(n)$ mit $\det A = 1$) heißen auch Drehungen; für $n = 2$, $n = 3$ sind das nach Satz 7 die "anschaulichen Drehungen".

Bei $n = 3$ wird die Drehachse durch den EV zum EW 1 angegeben.

Bei $\det A = -1$ enthält A Spiegelungen.

4.3 Selbstadjungierter Endomorphismus

In 4.3 stets: V \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt;

$\varphi : V \rightarrow V$ linear. Gilt $\langle v, \varphi(w) \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle$ für alle $v, w \in V$, dann heißt φ **selbstadjungiert**.

Ziel: Analog zu Satz 5 aus 2.

Definition: Ein Endomorphismus $\varphi : V \rightarrow V$ heißt selbstadjungiert, wenn $\langle v, \varphi(w) \rangle = \langle \varphi(v), w \rangle$ gilt $\forall v, w \in V$.

SATZ 1. Sei $\dim V = n$ und v_1, \dots, v_n eine ONB. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ linear und A die Matrix zu φ bzgl. v_1, \dots, v_n . Dann gilt:

φ selbstadj. $\Leftrightarrow A$ symmetrisch/Hermite'sch

denn: $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$; $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$.

$$\left. \begin{aligned} \langle v, \varphi(w) \rangle &= {}^t \vec{x} (A \vec{y}) = {}^t \vec{x} \bar{A} \vec{x} \\ \langle \varphi(v), w \rangle &= {}^t (A \vec{x}) \vec{y} = {}^t \vec{x} {}^t A \vec{y} \end{aligned} \right\} \dots \varphi \text{ selbstadj.} \Leftrightarrow \bar{A} = {}^t A$$

LEMMA. Ist φ selbstadjungiert und λ ein EW von φ , dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

denn: v EV, $v \neq 0$.

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle$$

$$\bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Ist V n -dim. \mathbb{R} -VR, dann interpretier $\varphi : V \rightarrow V$ selbstadj. zunächst als symm. Matrix A , nach Satz 1. Dann ist A auch hermite'sch, und das Lemma kann angewendet werden auf $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$; $\vec{x} \mapsto A \vec{x}$ über \mathbb{C} gibt's n EW, diese sind alle reell.

Ist φ selbstadjungiert auf einem reellen Raum, dann hat p_φ $\dim V$ reelle Nullstellen!

SATZ 2. Sei $\dim V = n$, $\varphi : V \rightarrow V$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von φ . Insbesondere ist φ diagonalisierbar.

Bedeutung: selbstadj. Abb. können durch orthogonale Abb. diagonalisiert werden.

Beweis: Induktion nach n . Für $n = 1$ nix zu zeigen!

$n \geq 2$: Es gibt EW $\lambda \in \mathbb{K}$ (s.o.), dazu v EV.

$W = \{w \in V : \langle w, v \rangle = 0\}$; $\dim W = n - 1$.

Rechne nach: $\varphi(W) \subset W$. Sei $w \in W$,

$\langle \varphi(w), v \rangle = \langle w, \varphi(v) \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle w, v \rangle = 0$

In W gibt's ONB aus EV von φ , z.B. v_1, \dots, v_{n-1} . Wähle $v_n = \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow$ tut's.

Folgerung: ist φ selbstadj. und sind λ_1, λ_2 EW von φ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann stehen $\text{Eig}(\lambda_1)$ und $\text{Eig}(\lambda_2)$ senkrecht aufeinander; d.h. $v_j \in \text{Eig}(\lambda_j)$ ist $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Interpretiere Satz 2 in Matrizen: sei $\varphi : V \rightarrow V$ selbstadj.; v_1, \dots, v_n ONB. Dann hat φ darstellende Matrix A ; symm./Hermite'sch

Dann gibt es $S \in O(n)$ bzw. $U(n)$ mit

$${}^t \bar{S} A S = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}; \lambda_j \text{ EW von } A$$

SATZ 3.

- (i) Sei $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symm. Bilinearform/Hermite'sche Form.
 b ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn es *eine* ONB von V gibt, so dass $(b(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ nur *positive* EW hat.
- (ii) Sei b eine symm. Bilinearform/Hermite'sche Form. Dann gibt es eine ONB w_1, \dots, w_n von V , so dass die darstellende Matrix $(b(w_i, w_j))$ Diagonalmatrix ist.
 (Zusatz: in den Koordinaten nach (ii) ist $b(v, w) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n$, wenn $v = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$, $w = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ ist.

SATZ 4. Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ symm./Hermite'sch. Matrix 15

Sei $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$. Dann gilt:

${}^t \bar{x} A \bar{y}$ ist Skalarprodukt $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ für alle $1 \leq k \leq n$

(Bew: Übung; G. Fischer, *Lineare Algebra*, "Satz von Hurwitz")

Simultane Diagonalisierung

SATZ 5. Sei V ein endlich-dim. VR mit Skalarprodukt, $\varphi_1, \dots, \varphi_k : V \rightarrow V$ selbstadjungiert (oder orhtogonal oder unitär)

Genau dann hat V eine Basis aus EV zu allen φ_j , wenn gilt $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.

Bild 5

$$5x_1^2 + 2x_2^2 = 1$$

Bild 6

$$x_1' = \sqrt{5}x_1, \quad x_2' = \sqrt{2}x_2$$

Bild 7

Ziel: verstehe Lösungsmenge von

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0$$

$$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n), \quad \vec{c} = (x_1, \dots, x_n).$$

$$\sum b_i x_i = \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$$

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i = j) \\ \frac{1}{2} a_{ij} & (i < j) \\ \frac{1}{2} a_{ji} & (i > j) \end{cases}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n a'_{ij} x_i x_j = {}^t \vec{x} A \vec{x}; \quad A = (a'_{ij})$$

A symm.

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 x_1 + x_2^2 = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Die quadr. Gleichung hat also die Form

$$\boxed{{}^t \vec{x} A \vec{x} + \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + c = 0}$$

1. Schritt zu einer "Normalform":

bringe linearen Anteil zum Verschwinden.

Wähle $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und setze $\vec{y} = \vec{x} + \vec{x}_0$ $\vec{x} = \vec{y} - \vec{x}_0$ Einsetzen in \square ;

$$Q(\vec{x}) = {}^t \vec{x} A \vec{x}$$

$$\begin{aligned} 0 &= Q(\vec{y} - \vec{x}_0) + \langle \vec{b}, \vec{y} - \vec{x}_0 \rangle + c \\ &= Q(\vec{y}) + Q(\vec{x}_0) - 2 {}^t \vec{y} A \vec{x}_0 + \langle \vec{b}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{x}_0 \rangle + c \\ &= Q(\vec{y}) + \langle \vec{b} - 2A\vec{x}_0, \vec{y} \rangle + (Q(\vec{x}_0) - \langle \vec{b}, \vec{x}_0 \rangle + c) \end{aligned}$$

Annahme: $\det A \neq 0$. Dann gibt's ein \vec{x}_0 mit $2A\vec{x}_0 = \vec{b}$.Mit diesem \vec{x}_0 wird \square äquivalent

$$\boxed{Q(\vec{y}) = t}; \quad t = -c + \langle \vec{b}, \vec{x}_0 \rangle - Q(\vec{x}_0).$$

Definition: Sei V ein reeller VR mit Skalarprodukt. Sei b eine symm. Bilinearform auf V , $Q(\vec{x}) = b(\vec{x}, \vec{x})$.

Eine "Quadrik" ist die Lösungsmenge

$$\{v \in V : Q(v) = c\}$$

für festes $c \in \mathbb{R}$.

→ Jede allg. quadratische Gleichung auf \mathbb{R}^n kann durch $\vec{x} \mapsto \vec{y} = \vec{x}_0$ in eine Quadrik überführt werden.

2. Schritt: finde eine "simple" Beschreibung für Q (Hauptachsentransformation)

Hauptachsensatz: Sei V ein \mathbb{R} -VR, v_1, \dots, v_n sei eine Basis.

Sei $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symm. Bilinearform. Sei $B = (b(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ die darstellende Matrix. Dann gibt es eine Basis w_1, \dots, w_n von V mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Matrix des Basiswechsels $v_i \rightarrow w_i$ ist orthogonal
- (ii) $(b(w_i, w_j))$ ist Diagonalmatrix; Einträge sind EW von B .

(Mehr als Paragraf 3, Satz 3; dort nur v_1, \dots, v_n ONB)

Anwendung: unsere Quadrik sei gegeben durch

$${}^t \vec{x} A \vec{x} = t, \quad A \text{ symm.}$$

Dann gibt es $S \in O(n)$ mit

$${}^t S A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

In den Koordinaten $\vec{z} = S\vec{x}$ lautet die Gleichung jetzt

$$\boxed{\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 = t}$$

"euklidische Normalform"

Wegen $\det A \neq 0$ sind alle $\lambda_j \neq 0$

$$\lambda_j > 0 \Rightarrow \lambda_j z_j^2 = (\sqrt{\lambda_j} z_j)^2 = v_j^2 \text{ mit } v_j = \sqrt{\lambda_j} z_j$$

$$\lambda_j < 0 \Rightarrow \lambda_j z_j^2 = -|\lambda_j| z_j^2 = -v_j^2 \text{ mit } v_j = \sqrt{|\lambda_j|} z_j.$$

$$\pm v_1^2 \pm \dots \pm v_n^2 = t$$

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} v_1^2 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_2|} v_2^2 + \dots + \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} v_n^2 = t$$

Fall 1: $t = 0$ $\pm v_1^2 \pm v_2^2 \pm \dots \pm v_n^2 = 0$ "Normalform der Quadrik"

Fall 2: $t \neq 0$. Teile durch t ; behandle $\pm \frac{v_j}{t}$ wie vorher; $\pm u_1^2 \pm \dots \pm u_n^2 = 1$

Bilder für die Normalformen bei $\det A \neq 0$

$$n = 2: \quad v_1^2 + v_2^2 = 1, \quad v_1^2 - v_2^2 = 1 \quad \boxed{-v_1^2 - v_2^2 = 1, \text{ leer}}$$

Bild 8

Euklidische Normalformen:

$$\lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 = 1$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Bild 9

$$\pm v_1^2 \pm v_2^2 = 0 \quad v_1^2 + v_2^2 = 0 \quad \vec{v} = \vec{0}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \pm v_2$$

Bild 10

Bilder für die Normalform bei $\det A \neq 0$, $n = 3$

$$\text{Rechte Seite} = 0: v_1^2 \pm v_2^2 \pm v_3^2 = 0$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}. \text{ Ggf. mit } -1 \text{ multiplizieren, neu nummerieren.}$$

Bleibt $2 \times "$ +", $1 \times "$ -". $v_1^2 + v_2^2 = v_3^2$ "Kegel" "Kreiskegel"

Bild 11

$$\text{Rechte Seite} = 1: \pm v_1^2 \pm v_2^2 \pm v_3^2 = 1.$$

$$-v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1 \text{ leer; } v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \text{ "Kugel"}$$

Bild 12

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 1$$

Idee: $r^2 = v_1^2 + v_2^2$
 $r^2 - v_3^2 = 1 \Rightarrow |r| \geq 1$

Bild 13

$$v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 = 1.$$

$$r^2 = v_2^2 + v_3^2 \quad v_1^2 - r^2 = 1$$

Bild 14

Sonderfälle bei $\boxed{\det A = 0}$ Sei $\mu =$ Vielfachheit des EW 0.

$$\det A = 0 \Rightarrow \mu \geq 1.$$

1. Schritt: $\vec{y} = \vec{x} + x_0$
 $Q(\vec{y}) + \langle 2A\vec{x}_0 - \vec{b}, \vec{y} \rangle = t$

Fall 1: $2A\vec{x}_0 = \vec{b}$ ist lösbarDann wie bisher, aber es treten μ EW 0 auf.

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_{n-\mu} z_{n-\mu}^2 = t \quad (\mu \text{ mal EW } 0)$$

Diese heißen Zylinder.

Beispiel: $n=3$

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 \quad (v_3 \text{ "frei"})$$

Bild 15

$$\text{Bei } v_1^2 - v_2^2 = 1$$

Bild 16

Fall 2: $2A\vec{x}_0 = \vec{b}$ ist *nicht* linear. Dann diagonalisiere *zuerst* die quadr. Form. In den neuen Koordinaten ist dann

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_{n-\mu} z_{n-\mu}^2 + \langle \vec{B}, \vec{z} \rangle = t'$$

mit $B \in \mathbb{R}^n$. in z_1 kommen Terme vor $\lambda_1 z_1^2 + Bz_1$, wende quadr. Ergänzung an. Geht für $z_1, \dots, z_{n-\mu}$

Dann ist durch Substitution $\vec{z} = \vec{w} + \vec{z}_0$

$$\lambda'_1 w_1^2 + \dots + \lambda'_n w_{n-\mu}^2 + B_{n-\mu+1} w_{n-\mu+1} + \dots + B_n w_n = t$$

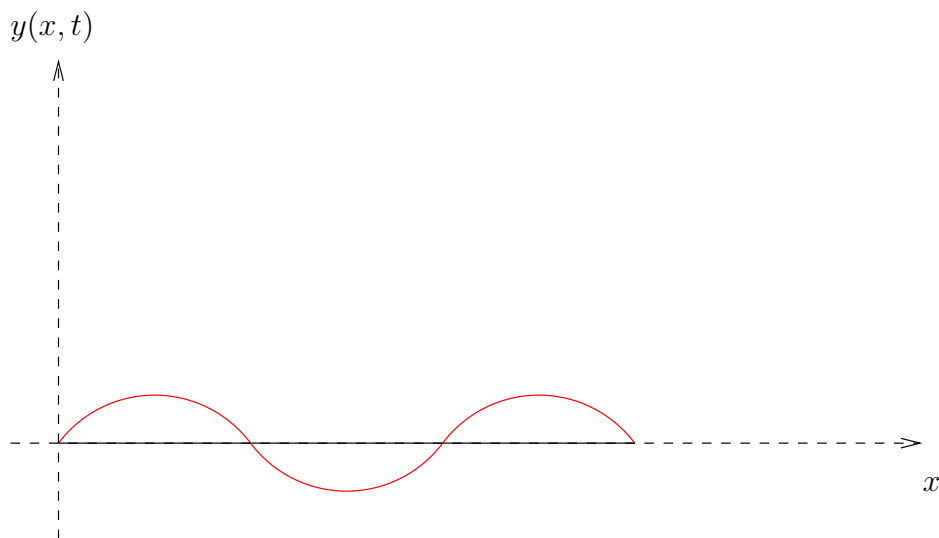
Bilder: $n = 2$: $x^2 = y$ Parabel.

$n = 3$: Bild 17

Übung: bestimme dazu die Gleichungen $x^2 + y^2 + z = 0$

$$x^2 - y^2 + z = 0$$

Zweites Intermezzo: die schwingende Saite



Halte t fest, betrachte die Funktion $x \mapsto y(x, t)$.

Ist diese diffbar, dann bezeichne die Ableitung mit $\frac{\partial}{\partial x} y(x, t)$ "partielle Ableitung nach x ".

Umgekehrt: ist $t \mapsto y(x, t)$ diffbar, schreibe $\frac{\partial}{\partial t} y(x, t)$ für die Ableitung davon. $\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) \hat{=}$ zweimal nach t differenzieren.

Gesucht sind Lösungen $y : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der *Wellengleichung*

$$(*) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ mit } y(0, t) = y(1, t) = 0$$

$$\text{und } y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

mit gegebenen Funktionen $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, "glatt"

Können wir Lösungen raten?

$$\cos(x + t), \sin(x + t)$$

$$\cos(n(x + t)), \sin(n(x + t))$$

Hilbert-Räume. Ziel: wir beschreiben die Lösungen der Wellengleichung in einem ∞ -dim. Raum, mit Skalarprodukt.

$$l^2 = \{(z_n) : z_n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{Z}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2 \text{ konvergieren}\}$$

$$z = (z_n), w = (w_n), \langle z, w \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n \overline{w_n}$$

$$\text{Im } l^2 \text{ gibt's "Länge" } \hat{=} \text{ Norm } \|z\|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_n|^2$$

$$\text{Deshalb gibt's auch "Abstand" } d(z, w) = \|z - w\|.$$

$$\text{Es gilt } \boxed{\begin{array}{l} d(z, w) = d(w, z), d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w \\ d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \forall a, b, c \in l^2 \end{array}} \quad (*^2)$$

In l^2 gibt es einen Konvergenzbegriff: $a \in l^2; a_k \in l^2 (k \in \mathbb{N})$.

Wir nennen a_k konvergent gegen a , wenn für $\lim_{k \rightarrow \infty} d(a_k, a) = 0$

Allgemeiner: sei V ein \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt; $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Dann hat $d(v, w) = \|v - w\|$ bereits alle Eigenschaften $(*^2)$.

Eine Folge von Elementen $v_k \in V$ heißt konvergent gegen v , wenn gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - v\| = 0$.

Wenn v_k gegen v und v' konvergiert, dann zeigt Δ -Ungleichung $\|v - v'\| = 0$, also $v = v'$.

Also ist v durch v_k bestimmt, wir schreiben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$$

Eine Folge $v_k \in V$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\|v_n - v_k\| < \epsilon$ für alle $n, k > N$.

Konvergente Folgen sind Cauchy. Umkehrung ist falsch!

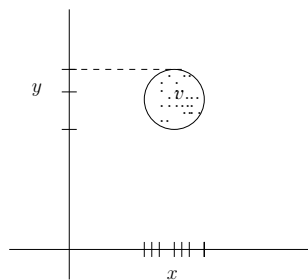
Ist jede Cauchy-Folge konvergent, dann heißt V **Hilbert-Raum**.

Es gibt viele Hilbert-Räume:

$\mathbb{R}; \mathbb{R}^n$ (leicht); l^2 (mäßig schwere Übung)

Warum ist \mathbb{R}^2 ein Hilbert-Raum? $v_k \in \mathbb{R}^2; v_k = (x_k, y_k)$

Was heißt $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v = (x, y)$?



Jetzt klar: v_k ist Cauchy $\Leftrightarrow (x_k), (y_k)$ Cauchy

Da Cauchy-F. in \mathbb{R} konvergent sind, gilt dasselbe im \mathbb{R}^2 . Genauso im \mathbb{R}^n , mit mehr Aufwand auch im l^2 .

Beispiel: Sei $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$

(solche f heißen stetig, wenn $\Re f, \Im f$ stetige Fkt. $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sind)

$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ ist Skalarprodukt:

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle; \quad \langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle, \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \quad \langle f, f \rangle = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} f \equiv 0 \quad \int_0^1 |f|^2 dx = 0$$

Sehr wichtige Beobachtung:

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x) : n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Wir zeigen } \langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

$$\langle e_n, e_n \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 dx = 1.$$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x} dx = \frac{e^{2\pi i(n-m)x}}{2\pi i(n-m)} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1-1}{2\pi i(n-m)} = 0$$

Wenn die $e_n(x)$ "genügend viele" Fkt. sind, sollte sich jedes $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f) e_k(x) \quad (1)$$

schreiben lassen! Das geht, aber nur, wenn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f) e_k(x)$ als Grenzwert in V verstanden wird.

(1) heißt Fourier-Entwicklung von f .

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e_l, e_k \right\rangle = \sum_l a_l \langle e_l, e_k \rangle = a_k$$

Wiederholung Hilberträume:

V ein \mathbb{K} -VR mit Skalarprodukt; $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$$d(v, w) = \|v - w\|;$$

$$\boxed{\begin{aligned} d(v, w) &= d(w, v), \quad d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w; \\ d(v, w) + d(w, u) &\geq d(v, u) \end{aligned}}$$

Eine Folge $v_k \in V$ heißt konvergent mit Grenzwert v , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(v_k, v) = 0; \text{ wir schreiben } v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k \dots$$

Eine Folge $v_k \in V$ heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|v_k - v_l\| < \epsilon$ für alle $k, l > N$.

Ist jede CF konvergent, dann heißt V **Hilbertraum**.

$V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, gewöhnl. Skalarprodukt (Hilbert-R.)

$$\left. \begin{aligned} l^2 &= \{(a_n) : a_n \in \mathbb{C}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \text{ konvergiert}\}; \\ \langle (a_n), (b_n) \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n} \text{ Skalarprodukt} \end{aligned} \right\} \text{Hilbertraum}$$

Orthonormalsysteme in einem Hilbertraum V sind Folgen (e_n) mit $e_n \in V$ und $\|e_n\| = 1$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ ($n \neq m$) ($\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$)

Ein Orthonormalsystem heißt Hilbert-Basis, wenn jedes $v \in V$ in der Form $v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ geschrieben werden kann; $\lambda_j \in \mathbb{K}$

Beispiel: in l^2 ist durch $e_n = (, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-te Stelle}}, 0, 0, \dots) = (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{Z}} \quad n \in \mathbb{Z}$

eine Hilbert-Basis, dann ist $a = (a_n) \in l^2$, dann ist

$$a = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e_j; \text{ es gilt } \langle e_n, e_n \rangle = 1, \langle e_n, e_m \rangle = 0 \quad (n \neq m)$$

In Hilbert-Räumen gilt der Satz des Pythagoras!

Idee: starte mit ONS in V ; dieses e_n . Zu jedem $v \in V$ heißt $\langle v, e_n \rangle$ n -ter Fourierkoeff. von v .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n\|^2 = \langle v - \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n, v - \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n, \sum_k \langle v, e_k \rangle e_k \rangle - \langle v, \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n \rangle - \langle \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n, v \rangle \\ &= \|v\|^2 + \sum_{n,k} \langle v, e_n \rangle \overline{\langle v, e_k \rangle} \langle e_n, e_k \rangle - \sum_n \overline{\langle v, e_n \rangle} \langle v, e_n \rangle - \dots \\ &= \|v\|^2 + \sum_k \langle v, e_k \rangle \overline{\langle v, e_k \rangle} - \sum_n \overline{\langle v, e_n \rangle} \langle v, e_n \rangle - \dots \\ &= \|v\|^2 - \sum_n \overline{\langle v, e_n \rangle} \langle v, e_n \rangle \end{aligned}$$

SATZ 1. (Bessel'sche Ungleichung). Gegeben sei ein VR mit Skalarprodukt, e_n ein ONS. Dann gilt für jedes $v \in V$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

Insbesondere ist die Folge der Fourier-Koeff.: $(\langle v, e_n \rangle) \in l^2$

Ist V sogar ein Hilbertraum mit Hilbert-Basis e_n , dann gilt sogar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 = \|v\|^2 \quad \text{Parseval'sche Gleichung}$$

Beispiel (klassische Fourier-Analyse).

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt stetig/diffb. etc, wenn dasselbe für $\Re f$ und $\Im f$ gleichzeitig gilt:
 $C[0, 1] =$ alle solchen stg. f .

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ ist Skalarprodukt; $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$

$e_n(x) = \cos(2\pi n x) + i \sin(2\pi n x)$ ist ONS. Leider ist $C[0, 1]$ kein Hilbertraum. Für jedes $f \in C[0, 1]$ ist der Fourierkoeff.

$$\langle f, e_n \rangle = \hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

Allgemeiner können die Fourier-Koeff. $\hat{f}(n)$ durch $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$ def. werden, sobald das Integral existiert; also insbesondere für jede Regelfunktion f . Es gilt trotzdem nach

Bessel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_0^1 |f|^2 dx \quad (\text{klassische Bessel'sche Ungleichung})$$

Wenn: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e_n$ konvergiert, dann ist der Grenzwert f .

Hier ist Konvergenz bzgl. der $\| \cdot \|$ gemeint, $\hat{=}$ "Normkonvergenz"

Man kann nun in die Gleichung $f = \sum \hat{f}(n) e_n$ "Werte" einsetzen.

WARNUNG: wir erwarten $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = f(x)$

aber weder die Konvergenz der "Fourier-Reihe" $\sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ noch die Gleichheit sind i.a. richtig.

SATZ 2. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig diffbar. Dann gilt für $0 < x < 1$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} =: \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Hier ist Konvergenz in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} gemeint; "punktweiser Konvergenz von Fourier-Reihen".

Ein warnendes Beispiel: Betrachte die Reihe $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi i n} e_n$

Wegen Konv. von $\sum \frac{1}{n^2}$ ist

$(\frac{1}{2\pi i n})$ in l^2 . Was ist mit punktweiser Konvergenz?

SATZ 3. Für $0 < x < 1$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|n| \leq N \\ n \neq 0}} -\frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n x} = x - \frac{1}{2}, \text{ für } x = 0 \text{ ist der Grenzwert } 0.$$

Bild 18

3. Lösung der Wellengleichung. WIESO 3. ? WAS WAR 1. UND 2. ?

Wird eine Funktion $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ durch ihre F-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$ dargestellt, dann wird durch die Reihe eine Fkt. auf ganz \mathbb{R} erklärt, "1-periodische Fortsetzung von f "

Bild 19

Ist $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ diffb. mit $f(0) = f(1) = 0$, dann setze $f(-x) = -f(x)$ für $0 < x < 1$. Dann ist f auf $[-1, 1]$ erklärt, kann 2-periodisch fortgesetzt werden, bleibt diffb.

Wiederholung:

SATZ 3. Sei $\psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad (0 < x < 1)$$

gegebene 1-periodische Funktion. Dann gilt

$$\psi_1(x) = - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi inx}}{2\pi in},$$

wobei der Grenzwert als $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{0 < |n| \leq N}$ zu verstehen ist.

SATZ 2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 1-periodische, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} dx$$

mit

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx} dx$$

Sinusreihen für ungerade Funktionen.

Gegeben sei zunächst $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig diffb. (auch am "Rand" bei 0 bzw. 1), mit

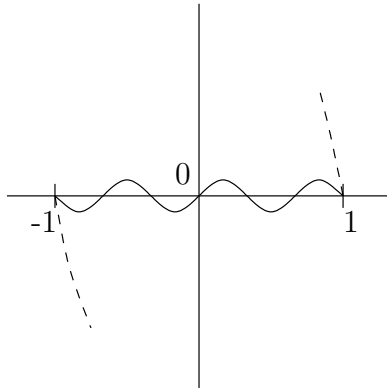
$$\boxed{f(0) = f(1) = 0}$$

Setze dann f durch $f(-x) = -f(x)$ auf $[-1, 1]$ und anschließend 2-periodisch auf \mathbb{R} fort.

Dann ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-periodisch und stetig diffbar.

$F(x) = f(2x)$ hat nach Satz 2 eine Fourier-Entwicklung.

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{F}(n)e^{2\pi inx}$$



mit

$$\hat{F}(n) = \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)e^{-2\pi inx} dx$$

Hier ist

$$\Re \hat{F}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x) \cos(2\pi nx) dx = 0,$$

denn der Integrand $F(x) \cos(2\pi nx)$ ist ungerade. Also

$$\hat{F}(n) = -i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x) \sin(2\pi nx) dx = -2i \int_0^{\frac{1}{2}} F(x) \sin(2\pi nx) dx$$

Also $\hat{F}(-n) = -\hat{F}(n)$ und $\hat{F}(0) = 0$.

Fasse Terme mit n und $-n$ zusammen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(n)(e^{2\pi inx} - e^{-2\pi inx}) \\ &= 2i \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}(n) \sin(2\pi nx) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi nx) \int_0^{\frac{1}{2}} f(2y) \sin(2\pi ny) dy \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(2\pi nx) \int_0^1 f(u) \sin(\pi nu) du \\ &\stackrel{!}{=} f(2x) \end{aligned}$$

Ersetze $2x$ durch x :

LEMMA. (Sinusreihe für ungerade Funktionen.)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade, 2-periodisch und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x) \int_0^1 f(u) \sin(\pi n u) du$$

3. Lösung der Wellengleichung. Das Modell für die schwingende Saite führt auf Lösungen $y(x, t)$ von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad \forall t$$

mit "Anfangsbedingungen"

$$y(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

zu gegebenen "glatten" $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Annahme: f, g lassen sich zu $2 \times$ stetig diffbaren ungeraden Funktionen mit Periode 2 fortsetzen.

WENN das Problem eine "glatte" Lösung $y(x, t)$ hat,

DANN gilt nach dem Lemma

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x) c_n(t) \quad (*)$$

mit

$$c_n(t) = 2 \int_0^1 y(x, t) \sin(\pi n x) dx$$

Vorteile: (*) "trennt" t und x ; $y(0, t) = y(1, t) = 0$ ist in den Ansatz "eingebaut"

WENN gliedweises Differenzieren erlaubt ist,

DANN gilt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 \sin(-\pi n x) c_n(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x) c_n''(t)$$

WENN Koeffizientenvergleich erlaubt,
DANN

$$c_n''(t) = -(\pi n)^2 c_n(t)$$

mit den "Anfangsbedingungen"

$$c_n'(0) = 2 \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) \sin(\pi n x) dx = 2 \int_0^1 g(x) \sin(\pi n x) dx$$

$$c_n(0) = 2 \int_0^1 y(x, 0) \sin(\pi n x) dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin(\pi n x) dx$$

Lösung der Dgl. ist eindeutig bestimmt:

$$c_n(t) = c_n(0) \cos(\pi n t) + c_n'(0) \frac{\sin(\pi n t)}{\pi n}$$

Zur Vereinfachung sei

$$A_n = \int_0^1 f(x) \sin(\pi n x) dx, \quad B_n = \int_0^1 g(x) \sin(\pi n x) dx$$

WENN alle Umformungen ok,

DANN ist die Lösung des Problems durch die "Bernoulli-Reihe"

$$y(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) \cos(\pi n t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\pi n x) \frac{\cos(\pi n t)}{\pi n}$$

gegeben.

ABER: $2 \sin \varphi \cos \psi = \sin(\varphi + \psi) + \sin(\varphi - \psi)$,

also

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x) \cos(\pi n t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin \pi n(x+t) + \sin \pi n(x-t)) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t))$$

und ähnlich

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\pi n x) \frac{\cos(\pi n t)}{\pi n} = \frac{1}{2} \left(\int_0^{x+t} - \int_0^{x-t} \right) g(y) dy$$

Das bringt $y(x, t)$ in geschlossene Form:

$$\begin{aligned} 2y(x, t) &= f(x+t) + f(x-t) + \int_0^{x+t} g(y) dy - \int_0^{x-t} g(y) dy \\ &= \underbrace{f(x+t) + \int_0^{x+t} g(y) dy}_{\text{Fkt. in } (x+t)} + \underbrace{f(x-t) - \int_0^{x-t} g(y) dy}_{\text{in } (x-t)} \end{aligned}$$

HURRA! Die Funktion *ist* $2 \times$ diffbar *und* löst das Problem. Nach dem "Sinusreihen-Lemma" können wir $y(x, t)$ in eine Reihe entwickeln.

Das ist dann die Bernoulli-Reihe; dies *muss* deshalb auch konvergieren!

SATZ 4. Obige Formel gibt die eindeutig bestimmte Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t^2}, \quad y(0, t) = y(1, t) = 0$$

mit

$$y(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Dies sind 1-dim. "eingesperrte" und deshalb periodische Lösung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Sonderrolle für $\sin \pi n(x + t)$

$V \supset 2 \times$ stetige Funktion

$$y(x, t) \mapsto \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Bild 20

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \quad y(\vec{x}, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in \text{Rand.}$$

5 Funktionen mehrerer Variabler

Fernziel: $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^k$ "stetig", "diffb" etc?

5.1 Stetigkeit

(a) Die Idee des "Abstands". M (beliebige Menge). Eine Metrik auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \mapsto [0, \infty)$ mit

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; d(x, y) = d(y, x); d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$$

Beispiele: M = Menge aller Bahnhöfe in Europa.

$$d(x, y) = \begin{cases} \text{schnellste Fahrzeit von } x \text{ nach } y \\ \text{billigste Fahrt von } x \text{ nach } y \end{cases}$$

$M = V$ -VR mit Skalarprodukt. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

$d(v, w) = \|v - w\|$ ist Metrik auf V "Normmetrik"

$$\mathbb{R}^n : d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Andere Metriken auf \mathbb{R}^n :

$$(i) d(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall i \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}; \triangle\text{-Ungl.: Übung!}$$

$$(ii) d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ sind bereits Metriken!}$$

Beispiel: M = Kugeloberfläche in \mathbb{R}^3 . Zwei natürliche Optionen;

entweder eine Metrik im \mathbb{R}^3 wählen, diese nur auf M betrachten.

oder: Länge von Großkreisen zwischen zwei Punkten von M ("Gummiband-Technik")

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\} \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f g dx$$

$$d_1(f, g) = \|f - g\|, \|f\|^2 = \int_0^1 |f|^2 dx$$

$$d_2(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, d_3(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \text{ sämtliche Metriken}$$

Definitionen: Ist auf M eine Metrik d gegeben, dann heißt M **metrischer Raum**. Ist $v_n \in M$ eine Folge in M , und $v \in M$ mit

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) = 0$, dann heißt v_n konvergent mit Grenzwert v .

Jede Folge hat höchstens einen Grenzwert, den bezeichnen wir mit $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$.

Eine Folge v_n heißt Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ mit $d(v_n, v_m) < \epsilon \forall n, m > N$

Konvergente Folgen sind Cauchy, Umkehrung i.a. falsch!

Zusammenfassung a) Metrische Räume

sind Mengen M mit "Abstand/Metrik" $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ und

$$d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$$

(b) Stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Seien X, Y metr. Räumen mit Metrik d_X auf X , d_Y auf Y .

Eine Abb. $f : X \rightarrow Y$ heißt stetig in $x \in X$, wenn für jede $x_n \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$

Alternativ: f ist stetig in x genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$d_X(\tilde{x}, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(\tilde{x}); f(x)) < \epsilon$$

Vergleiche mit stetigen Fkt. auf \mathbb{R} :

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in x , wenn $\forall \tilde{\epsilon} > 0 \exists \delta > 0$ mit $|\tilde{x} - x| < \delta \Rightarrow |g(\tilde{x}) - g(x)| < \tilde{\epsilon}$

Das ist *dasselbe*, wenn auf \mathbb{R} $d(x, y) = |x - y|$

Beispiele: Stetigkeit bleibt bei Verkettung erhalten:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) = g \circ f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

erlaubt, wenn f, g beide stetig.

f heißt stetig, wenn in jedem Punkt stetig ist.

Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Auf \mathbb{R}^n sei $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ mit $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \|\vec{z}\|^2$,

auf \mathbb{R} sei $d(x, y) = |x - y|$

Stetig von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Bild 21

Also: $M \subset \mathbb{R}^n$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. f ist stetig in $\vec{x}_0 \in M$, wenn für jedes $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \epsilon$$

(Oder: für alle $\vec{x}_n \in M$ mit $\vec{x}_n \rightarrow \vec{x}_0$ ist auch $f(\vec{x}_n) \rightarrow f(\vec{x}_0)$)

Beispiel: $f := e^{xy}(x^2 + y^3 + \sin(x + y))$; $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

ist stetig nach Verkettungsregel, denn \exp, \sin stetig; $(x, y) \mapsto x$ (oder y) sind stetig; und $(x, y) \mapsto xy$ ist stetig.

Wie in diesem Beispiel ist für eine durch elementare Fkt. beschriebene Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Stetigkeit in der Regel mit der Verkettungsregel leicht erkennbar!

Physik: Messaufgaben wie Druck, Temperatur, ... wird als stetige Funktionen auf \mathbb{R}^n (oder höher) modelliert.

Was heißt Stetigkeit für Abbildungen $f : (M \subset \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n, k \in \mathbb{N}$)

Hier sei auf \mathbb{R}^k der Abstand gegeben durch $\|\vec{x} - \vec{y}\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2}$
 f ist stetig in \vec{x}_0 , wenn $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\|_k < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\|_n < \epsilon$$

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_0)$ für jede Folge $\vec{x}_n \in M$ mit $\lim \vec{x}_n = \vec{x}_0$.

$f(\vec{m}) = (f_1(\vec{m}), \dots, f_n(\vec{m}))$; f_1, \dots, f_n heißen Koordinatenfkt. von f . $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$

SATZ. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$; $M \subset \mathbb{R}^k$; $\vec{x}_0 \in M$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

Dann gilt: f ist stetig in \vec{x}_0 genau dann, wenn alle $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq n$) in \vec{x}_0 stetig sind.

Beispiel: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos \frac{x}{y})$

$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ ist stg. auf \mathbb{R}^2 Bild 22

$-1 < \frac{x}{y} < 1$, diese Abbildung lebt nur auf $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \frac{x}{y} < 1\}$, dort stetig.

Beispiel: (Polarkoordinaten)

Bild 23

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Diese Abbildung ist stetig nur in (x, y) mit $x \notin [0, \infty)$ bei $(x, 0)$

$M = \{(x, y) : (x, 0) \Rightarrow x \notin [0, \infty)\}$; Polarkoordinaten sind stg. Abb. $M \rightarrow (0, \infty) \times (0, 2\pi)$

Hat Umkehrabbildung $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

3-dimensionale Polarkoordinaten (mehrere Möglichkeiten!) Eine Option

$$(r, \varphi, \psi) \mapsto (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)$$

$$r > 0, \varphi \in (0, 2\pi), -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

Vorletztes Beispiel:

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{stetig}\}$$

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

$d(f, g) := \|f - g\|$ ist eine Metrik

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

diese Abbildung ist stetig!

$f_n \in V$ habe Grenzwert $f \in V$.

$$\|f_n - f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)|$$

$f_n \rightarrow f$ heißt also "gleichmäßige Konvergenz". Also gilt nach HM1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Also \int_0^1 stetig!

WARNUNG: hat funktioniert, weil auf V die "richtige" Metrik gewählt wurde.

Wird auf V die Metrik über $\sqrt{\int_0^1 |f|^2 dx}$ oder $\int_0^1 |f(x)| dx$ eingeführt, dann ist das Regelin-tegral i.a. nicht mehr stetig.

Wiederholung:

$$V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}; \int : V \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

Auf \mathbb{R} sei Abstand: $(x - y)$

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f|^2 dx$$

$$d_j(f, g) := \|f - g\|_j \quad (j \in \{1, 2, \infty\})$$

Jedes d_j ist Metrik.

Wähle auf V die Metrik d_∞ . **Dann** ist $\int : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Das Integral ist auch stetig, wenn auf V mit Metrik d_1 gemessen wird.

denn: $f \in V, f_n \in V$ mit $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - f) dx = 0$

$$\left| \int_0^1 f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$$

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 \quad \left| \int_0^1 (f_n - f) dx \right| \leq \int_0^1 |f_n - f| dx \leq \left(\int_0^1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \times \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$$

Sätzchen: Sei V versehen mit der Metrik d_∞, d_1 oder d_2 . Dann ist $\int : V \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_0^1 f dx$ stetig.

Letztes Beispiel: $V = \{f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx; \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Macht V zu metr. Raum.

$$l^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in \mathbb{C}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \text{ konvergent}\}.$$

$\|(a_n)\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2} \rightarrow l^2$ hat ebenfalls Metrik.

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} \text{ mit } \hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$$

Für jedes $f \in V$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\hat{f}(n)$ def;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \int_0^1 |f|^2 dx$$

Es gibt also eine Abb.

$$\hat{\cdot} : V \rightarrow l^2; f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\|f\|_2^2 = \|(\hat{f}(n))\|_2^2$$

Insbesondere ist $\hat{\cdot}$ stetige Abb.

Ausblick auf HM3, Fourier-Transformation

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i \nu x} dx$$

Hier ist (z.B.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int |f|^2 dx$ ex.

$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, heißt Fourier-Transformierte

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

Dies sagt: $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \int |f|^2 dx \text{ ex.}\}$, dann ist $\hat{\cdot} : V \hookrightarrow$, *orthogonal*.

5.2 Aus der Topologie

Erinnerung. Ist $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es $x_0 \in I$ mit $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in I$.

Beispiel: $f(x) = x^2$, $I = (-1, 1)$

Bild 24

Ziel: wie kann dieser Satz formuliert werden, so dass er in \mathbb{R}^n oder auf metr. Räumen richtig bleibt?

Frage 1: wie muss $[a, b]$ in diese Situation übertragen werden?

\mathbb{R}^2 : Bild 25

Definition: Sei M ein metr. Raum mit Metrik d . Zu $m \in M$ heißt für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $U_\epsilon(m) = \{x \in M : d(x, m) < \epsilon\}$ ϵ -Umgebung von m . Eine Menge $U \subset M$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $m \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $U_\epsilon(m) \subset U$.

Beispiel: ein offenes Intervall (a, b) ist offen: zu $m \in (a, b)$ wähle $\epsilon = \frac{1}{2} \min(m - a, b - m) \Rightarrow U_\epsilon(m) \subset (a, b)$

Bild 26

Ein Intervall $[a, b]$ ist *nicht* offen

Bild 27

Definition: Eine Menge $A \subset M$ heißt abgeschlossen, wenn $M \setminus A$ offen ist.

Beispiel: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen. Im \mathbb{R}^n sind die "Kugeln"

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\} = K$$

offen und

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\} = \bar{K}$$

abgeschlossen.

Von jetzt an sei \mathbb{R}^n mit $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ und der Metrik versehen!

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es $R > 0$ gibt mit

$$M \subset U_R(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\| < R\}$$

SATZ 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in M$ mit $f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2)$ für alle $\vec{x} \in M$. (Sprechweise: f nimmt in \vec{x}_1 das Minimum, in \vec{x}_2 das Maximum an.)

Beweis von Satz 1: $\sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in M\} = S \in \mathbb{R}$, evtl. ∞ .

Es gibt $\vec{x}_n \in M$ mit $f(\vec{x}_n) - S < \frac{1}{n}$

Bild 28

Dieses Würfelhalbierungsverfahren liefert eine Teilfolge der x_n , die gegen $\vec{x}_0 \in U_R(0)$ konvergiert.

$$\lim f(\vec{x}_n) = S = f(\vec{x}_0)$$

Wäre $\vec{x}_0 \in M$, dann $f(\vec{x}_0) = S$, $\vec{x}_0 \in M$ und Satz 1 bewiesen. Wir brauchen:

Hilfssatz: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\vec{x}_n \in M$ eine Folge, die im \mathbb{R}^n den Grenzwert \vec{x}_0 hat. Dann ist $\vec{x}_0 \in M$.

Beweis: (geschenkt!) $\mathbb{R}^n \setminus M$ offen. $\vec{x}_0 \notin M$

Bild 29

Ziel: versuche, einen solchen Satz (\rightarrow SATZ 1.) für stetige Abbildungen zwischen *metrischen Räumen* zu formulieren.

Naive Übertragung metrische Räume: X Menge, d Metrik auf X .

$A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist, (d.h. $m \in X \setminus A \exists \epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(m) \subset X \setminus A$).

$A \subset X$ heißt **beschränkt**, wenn es $C > 0$ gibt mit $d(x, y) < C \forall x, y \in M$.

Beispiel: $l^2 = \{(a_i) : \sum |a_i|^2 < \infty\}$. $\|(a_i)\| = \sqrt{\sum |a_i|^2}$.

$\bar{D} = \{(a_i) : \|(a_i)\| \leq 1\}$ beschränkt und abgeschlossen.

Beweisidee für Satz 1:

Bild 30

$$e_i = (\dots, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

Für $i \neq j$ ist $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$

Definition: Ein metr. Raum heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiele: \mathbb{R}, \mathbb{R}^n mit Standardmetrik sind vollständig.

l^2 ist vollständig (sogar jeder Hilbert-Raum)

$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ mit Metrik $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ist vollständig.

Übung: ist $C[0, 1]$ mit $d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| dx$ vollständig? NEIN!

Definition: Sei X ein *vollständiger* metr. Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **kompakt**, wenn es zu jeder Folge (x_n) mit $x_n \in M$ eine *Teilfolge* gibt, die konvergiert und Grenzwert in M hat.

SATZ 2. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist *kompakt* genau dann, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

SATZ 2'. Ist $M \subset X$ eine *kompakte* Teilmenge eines vollständigen metr. R. X , dann ist M abgeschlossen und beschränkt.

Warnung: Umkehrung von Satz 2' ist falsch schon in l^2 , denn

$$\bar{D} = \{a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} : \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^2 \leq 1\}$$

ist *nicht* kompakt, weil die Folge $e_k = (\dots, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$

lässt wegen $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$ ($k \neq l$) nicht die Auswahl einer CF zu.

SATZ 3. Seien X, Y vollständige metr. Räume, $M \subset X$ kompakt.
 $f : M \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(M) = \{f(m) : m \in M\}$ kompakt.

Spezialfall von Satz 3.

SATZ 3' Sei X vollständiger metr. Raum, $M \subset X$ kompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann
 $m_1, m_2 \in M$ mit $f(m_1) \leq f(m) \leq f(m_2) \forall m \in M$.

(Funktionen nach \mathbb{R} nehmen auf kompakten Mengen Min/Max an)

Wird $X \in \mathbb{R}^n$ in Satz 3' gewählt, dann ergibt sich Satz 1.

Beweis Satz 3: Seien $y_k \in f(M)$

Gesucht: in $f(M)$ konvergente Teilfolge!

Wähle $m_k \in M$ mit $f(m_k) = y_k$.

M kompakt, also hat m_k konvergente Teilfolge m'_l mit Grenzwert $m \in M$.

Dann $f(m'_l)$ Teilfolge der y_k , $l \rightarrow \infty : f(m'_l) \rightarrow f(m)$

Beweis Satz 2': Kompakte Mengen sind beschränkt, denn: $M \subset X$ kompakt.

$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto d(x, y)$; Bild kompakt, also beschränkt.

Kompakte Mengen sind abgeschlossen (weil CF in M Grenzwerte X haben, der liegt dann in M wegen M kompakt)

Beweis Satz 2: Im \mathbb{R}^n sind abgeschlossenen beschränkte Mengen kompakt.

Bild 31

Erinnerung (Zwischenwertsatz): Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und zu $a, b \in I$
 etwa $f(a) < f(b)$, dann gibt es zu jedem $f(a) < c < f(b)$ ein $x \in I$ mit $f(x) = c$.

Bild32

Alternative Formulierung: das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion f ist wieder ein Intervall.

Erinnerung: ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge mit $\forall a < b \in I$, dann $(a, b) \subset I$

Bild 33

Sei X ein metr. Raum. Ein Weg in X ist eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \rightarrow X$; $\varphi(0)$ heißt
Anfang, $\varphi(1)$ **Ende**.

Eine Menge $M \subset X$ heißt (wegweise) **zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten
 $m_1, m_2 \in M$ einen Weg $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ gibt mit $\varphi(0) = m_1$, $\varphi(1) = m_2$

Bemerkung: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow M$ Intervall

Satz 4. Sei $M \subset X$ zusammenhängend, $f : M \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(M)$ zusammenhängend.

Beweis Satz 4: $y_1, y_2 \in f(M)$

Bild 34

$\exists m_i \in M$ mit $f(m_i) = y_i$

Wähle $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ stetig,

$\varphi(0) = m_1, \varphi(1) = m_2$

$$f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow f(M)$$

ist stetig (als Verkettung stg. Abb.), $f \circ \varphi(0) = y_1, f \circ \varphi(1) = y_2$

5.3 Der Banach'sche Fixpunktsatz

M sei ein vollständiger metrischer Raum, Metrik d .

$D \subset M$ sei abgeschlossen, $\Phi : D \rightarrow D$ sei eine Abbildung; es gebe ein $0 < q < 1$ mit

$$d(\Phi * x, \Phi(y)) \leq q d(x, y)$$

Banach'scher Fixpunktsatz: In dieser Situation hat Φ genau einen Fixpunkt, d.h. $x \in D$ mit $\Phi(x) = x$. Ist $x_0 \in D$ beliebig und $x_n = \Phi(x_{n-1})$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Beweisidee: $d(x_n, x_{n-1}) = d(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_{n-2})) \leq q d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq q^2 d(x_{n-2}, x_{n-3})$ etc.

Erstes Ziel: x_n ist Cauchy-Folge: $m > l$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_l) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{l+1}, x_l) \\ &\leq (q^{m-l} + \dots + q^2 + q + 1) d(x_{l+1}, x_l) \\ &\leq \frac{1}{1-q} d(x_{l+1}, x_l) \end{aligned}$$

$$d(x_l, x_{l+1}) \leq q^l d(x_1, x_0) \Rightarrow \boxed{d(x_m; x_l) \leq \frac{q^l}{1-q} d(x_0, x_1) \quad \forall m > l}$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle l_0 so groß, dass $\frac{q^{l_0}}{1-q} d(x_0, x_1) < \epsilon$.

$\Rightarrow \forall l, m > l_0$ gilt $d(x_m, x_l) < \epsilon$, also ist x_n CF, deshalb konvergent gegen $x \in D$ (weil D abgeschlossen, M vollständig).

2. Schritt: x ist Fixpunkt, denn Φ ist stetig $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q d(x, y)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(x_n) = \Phi(x)$$

$$0 \leftarrow d(x_n, x) = d(\Phi(x_{n-1}), x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Phi(x_{n-1}), x) = d(\lim \Phi(x_{n-1}), x) = d(\Phi(x), x)$$

3. Schritt: es gibt genau einen Fixpunkt, denn gäbe es zwei, $x \neq y$

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q d(x, y) \text{ wegen Eigenschaften von } \Phi,$$

andererseits $\Phi(x) = x$, $\Phi(y) = y$, Widerspruch zu $q < 1$.

1. Schritt: starte mit x_0 ; $\Phi(x_n) =: x_{n+1}$. Diese Folge konvergiert.

2. Schritt: Der Grenzwert dieser Folge ist Fixpunkt

3. Schritt: Es gibt höchstens einen Fixpunkt \Rightarrow Beweis komplett!

Fehlerschätzungen: d stetig, $x_m \rightarrow x$ ($m \rightarrow \infty$). Also

$$\boxed{d(x, x_l) \leq \frac{q^l}{1-q} d(x_0, x_1)} \quad (1)$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $y_j = x_{n+j}$ ($y_0 = x_n, y_1 = x_{n+1}$, etc...)

$$\boxed{d(x, x_{n+l}) \leq \frac{q^l}{1-q} d(x_n, x_{n+1})} \quad (2) \quad y_l = x_{n+l}$$

Zusatz zum Banach'schen Fixpunktsatz: für jeden Startwert x_0 gelten die Fehlerschätzungen (1) und (2)

Einfache Anwendungen:

1. Nullstellensuche. Gesucht: Nst. von $f(x) = e^x - 3x$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}e^x$$

Wähle $\Phi(x) = \frac{1}{3}e^x$ auf $D = [-1, 1]$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Phi(0) = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}} \text{ etc.}$$

Kontraktion? Welches q ?

$$\Phi(x) - \Phi(y) \stackrel{?}{\leq} q|x-y| \quad x \neq y$$

$$\frac{1}{3} \left| \frac{e^x - e^y}{x-y} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{e^y(e^{x-y} - 1)}{x-y} \right| < \frac{99}{100} \text{ auf } D.$$

(Man kommt so zur iterativen Berechnung von Nst., wenn $|\Phi'| \leq q < 1$ auf dem Def-Intervall.)

2. Beispiel: Dgl's lösen. Gesucht ist $y(x)$ mit $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$.

(Lösung bekannt, explizit, $y(x) = e^x$)

Interpretiere neu: $\int_0^t y'(x)dx = \boxed{\int_0^t y(x)dx = y(t) - 1}$

Sei $\Phi : C([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \circlearrowleft$

$$\Phi(f)(t) = 1 + \int_0^t f(x)dx \quad \text{Es ist } \Phi(y) = y \Leftrightarrow \text{Kasten gilt}$$

Auf $C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ wähle $d(f, g) = \max_{|x| \leq \frac{1}{2}} |f(x) - g(x)|$

Diese Abbildung ist kontrahierend:

$$\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \max_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left| \int_0^t (f - g)(x)dx \right| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty$$

$$f_0(x) = 0 \quad \forall x; \quad f_1 = \Phi(f_0)(x) = 1 \quad \forall x; \quad f_2(x) = 1 + \int_0^x dz = 1 + x;$$

$$f_3(x) = 1 + \int_0^x f_2(z)dz = 1 + \int_0^x (1 + z)dz = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Hier entstehen die Taylorpolynome für die Exponentialfkt.

Zur Übung beginne mit $f_0 = 1 - x$

Hinweis: "Trick" ist meist die Wahl einer "passenden" Metrik!

5.4 Differenzialrechnung im \mathbb{R}^n

(a) Erinnerung: zwei Interpretationen für "diffb. in x_0 " bei Fkt. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, nämlich:

Bild 35

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

$$(ii) \quad f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x, x_0)$$

$$\text{mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$$

In einer solchen Situation schreibt man auch

$$R(x, x_0) = o(|x - x_0|)$$

Formel in $g(x) = o(|x - x_0|)$, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 0$

Also ist f in x_0 diffbar mit $f'(x_0) = c$, wenn die "lineare Abbildung" $x \mapsto c(x - x_0)$ die Fkt. f "gut approximiert"

(b) Definition der Differenzierbarkeit.

Eine offene, zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n heißt **Gebiet**.

Bild 36

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Abbildung. F heißt in $\vec{x}_0 \in G$ diffbar, wenn es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ gibt mit

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \text{ für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$$

(hier: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$.)

Bemerkung 1: ist F in \vec{x}_0 diffb., dann ist L eindeutig bestimmt. Deshalb schreiben wir auch $F'(\vec{x}_0)$ für diese lineare Abbildung.

denn: $F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + L_1(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\dots) = F(\vec{x}_0) + L_2(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\dots)$

$$(L_1 - L_2)(\vec{x} - \vec{x}_0) = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \Rightarrow L_1 = L_2$$

(c) Was bedeutet das für Funktionen

$$F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ?$$

Lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind genau die Abb. $\vec{x} \mapsto \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle$ mit $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ fest
 $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$

F ist diffbar in \vec{x}_0 , wenn es c_1, \dots, c_n gibt mit $F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \sum c_j (x_j - x_j^{(0)}) + o(\dots)$

Zur Berechnung von c_1 schreibe $\vec{x} = (x_1, \vec{x})$

$$F(x_1, \vec{x}) - F(x_1^{(0)}, \vec{x}_0) = c_1 (x_1 - x_1^{(0)}) + \langle \vec{c}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Halte alle Terme mit \sim fest, lies das als lineare Approx. in x_1 .

Definiton: ist $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ und die Funktion $x_1 \mapsto F(x_1, \vec{x}_0)$ in $x_1^{(0)}$ diffbar (als Funktion einer Veränderlichen), dann heißt F nach x_1 partiell diffbar, und die Ableitung wird als $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ bezeichnet.

SATZ 1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0 \in G$ diffbar. Dann ist F nach jedem x_i partiell diffbar, und es gilt

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}_0) (x_j - x_j^{(0)}) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Geometrische Interpretation: $F : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Bild 37

Die lineare Abbildung $\langle (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$ beschreibt die Tangentialebene an den Grafen von F .

Beispiel: $F(x, y) = x^2 - y^2$

Bild 38

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y$$

WARNUNG: auch wenn alle $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ ($1 \leq j \leq n$) in \vec{x}_0 ex., folgt i.a. *nicht* die Differenzierbarkeit.

(d) Richtungsableitung: $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = 1$.

Ist $F(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ als Fkt von t in 0 diffbar, dann heißt $\partial_{\vec{v}}F(\vec{x}_0) = \frac{d}{dt}F(\vec{x}_0 + t\vec{v})|_{t=0}$ die Richtungsableitung von F in \vec{x}_0 . Bild 39

Es ist $\partial_{(1,0,\dots,0)}F(\vec{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0)$ etc.

SATZ 2. Sei $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{v}\| = 1$. Sei $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \vec{x}_0 diffbar.

Dann ex. $\partial_{\vec{v}}F(\vec{x}_0)$, und es gilt

$$\partial_{\vec{v}} = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}_0). \quad (*)$$

Insbesondere muss (*) für jede Richtungsableitung gelten, sonst ist F nicht diffbar in \vec{x}_0 .

(e) Der "Nabla-Operator" $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$

Damit wird "formal" gerechnet:

$$\nabla F(\vec{x}_0) = (\frac{\partial F}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{x}_0))$$

Die Formel für "Diffbar" von $F : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + \nabla F(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

$$F'(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \vec{y} \mapsto \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{y} \rangle$$

(f) Diffb. Abb. in den \mathbb{R}^k . Gegeben $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^k$.

$$F(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_k(\vec{x}))$$

$$F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

F ist diffbar in $\vec{x}_0 \Leftrightarrow$ alle F_j ($1 \leq j \leq k$) sind diffb. in \vec{x}_0 .

Schreibe $L = (L_1, \dots, L_k)$. Die Abb. L ist also gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \nabla F_1(\vec{x}_0) \\ \nabla F_2(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla F_k(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = J_F(\vec{x}_0) \text{ "Jacobi-Matrix"}$$

Wiederholung Differenzierbarkeit:

Bild 40

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$; $v_1^2 + \dots + v_n^2 = 1$. "Richtungsvektor"

Ist G offen, $\vec{x}_0 \in G$, dann $\vec{x}_0 + t\vec{v}$ für $|t|$ klein noch in G

$$\frac{d}{dt}f(\vec{x}_0 + t\vec{v})|_{t=0} =: \partial_{\vec{v}}f(\vec{x}_0)$$

heißt Richtungsableitung von f in Richtung \vec{v}

Ist $\vec{v} = \vec{e}_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$, dann $\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_{\vec{e}_j}$

f heißt in $\vec{x}_0 \in G$ diffbar, wenn es eine lin. Abb. L gibt mit

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + L(\vec{x} - \vec{x}_0) + R_{\vec{x}_0}(\vec{x})$$

mit $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{R_{\vec{x}_0}(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$

Schreibe dafür auch $o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$.

Wir schreiben $L = f'(\vec{x}_0)$ (lin. Abb.)

Jacobi-Matrix: ist $G \in \mathbb{R}^n$ Gebiet und f in $\vec{x}_0 \in G$ diffbar mit $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, dann gilt mit $f = (f_1, \dots, f_k)$

$$f'(\vec{x}_0) = J_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Kriterien und erste Anwendungen.

(1) Extremwerte diffb. Fkt.

Sei $G \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ "hat in \vec{x}_0 ein lokales Minimum", wenn $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ für $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \delta$ mit genügend kleinen $\delta > 0$.

Ist f in \vec{x}_0 diffbar, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = 0 \forall j$. (denn $f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(j-1)}, x_j, x_0^{(j+1)}, \dots)$ hat als Fkt von x_j ein Minimum)

Analog: lokales Max.

(2) Kettenregel: bei Fkt. von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Gegeben sei $G \in \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in G$

$g : G \rightarrow \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$

g sei in \vec{x}_0 und f in $g(\vec{x}_0)$ diffbar. Dann ist $f \circ g$ in \vec{x}_0 diffbar, und es gilt

$$J_f(g(\vec{x}_0)) \circ J_g(\vec{x}_0) = J_{f \circ g}(\vec{x}_0)$$

Beweis simpel:

$$f(\vec{y}) = f(\vec{y}_0) + J_f(\vec{y}_0)(\vec{y} - \vec{y}_0) + o(\|\vec{y} - \vec{y}_0\|)$$

$$g(\vec{x}) = g(\vec{x}_0) + J_g(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Setze $\vec{y} = g(\vec{x})$ ein.

$$\begin{aligned} f(g(\vec{x})) &= f \circ g(\vec{x}_0) + J_f(g(\vec{x}_0))(g(\vec{x}) - g(\vec{x}_0)) + \text{Rest} \\ &= f \circ g(\vec{x}_0) + J_f(g(\vec{x}_0))J_g(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \text{Rest} \end{aligned}$$

Beispiel: Gegeben $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+x^4+t^4}$$

$$G(u, 0) = \int_0^u \frac{dt}{1+0^4+t^4}$$

$$F(x) = G(x, x) = G \circ T(x)$$

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, x)$$

$$F'(x_0) = J_G(T(x_0))J_T(x_0)$$

$$J_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J_G = \left(\frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v} \right) = \left(\frac{1}{1+v^4+u^4}, \int_0^u \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{1+v^4+t^4} dt \right)$$

$$F'(x_0) = \frac{\partial G}{\partial u}(x_0, x_0) + \frac{\partial G}{\partial v}(x_0, x_0)$$

Allgemeiner: ist $f(x_1, \dots, x_n)$ diffbar, und $F(x) = f(x, x, \dots, x)$, dann gilt

$$F'(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \dots, x)$$

Zusammenhang dieser Begriffe:

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ in \vec{x}_0 diffbar, dann ist f auch in \vec{x}_0 stetig und nach allen x_j partiell diffbar.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + J_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

Warnung: Umkehrungen sind i.a. falsch.

SATZ. Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ sei auf ganz G nach allen x_i partiell diffb, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ seien alle stetig. Dann ist f auf G auch diffbar.

Höhere partielle Ableitungen.

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ diffbar. } f = (f_1, \dots, f_k) \Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Ist etwa $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ wieder diffb. nach x_i , dann bilde $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$

Ggf. gibt es also

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

SATZ (von Schwarz). Ist G ein Gebiet und existiert dort $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, und ist diese Fkt. stetig auf G , dann existiert auch

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \text{ und es gilt } \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Bei Vertauschbarkeit wird geschrieben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

nach x_1 , dann x_2 diff. 2×nach x_1 diff.

Die Hesse-Matrix

G Gebiet, $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$

Für alle 2-ten Ableitungen sei die Vertauschbarkeit gesichert. Dann bilde

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

diese symmetrische Matrix heißt **Hesse-Matrix**.

SATZ. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar; die 2-ten part. Ableitungen seien auf G stetig. ist $J_f(\vec{x}_0) = 0$ und die quadratische Form

$${}^t \vec{z} H_f(\vec{x}_0) \vec{z} = Q(\vec{z})$$

positiv definit, dann hat f in \vec{x}_0 ein lokales Minimum.

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + J_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}Q(\vec{x} - \vec{x}_0) + \text{Rest}$$

5.5 Mittelwertsatz und Taylor'sche Formel

Wiederholung HM I: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei oft diffb., wie Ableitungen vorkommen. $a \in I$. Dann ist

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R(a, x)$$

SATZ (aus HM I). Ist f $n + 1$ mal stetig diffbar, dann gilt

$$R(a, x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (t - a)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1} \text{ für ein } \xi \in (a, x)$$

Spezialfall $n = 0$: MWS der Diff-Rechnung:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi) \text{ f\"ur ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } a$$

Anwendung: ist $f'(a) = 0$. Dann *k\"onnte* a lokales Extremum sein.

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - a)^2 \quad (*)$$

Ist $f''(a) > 0$ und f'' in a stetig, dann lies aus (*) ab: $f(x) > f(a)$ f\"ur $0 < |x - a|$ klein.

Betrachte jetzt $G \subset \mathbb{R}^k$ Gebiet; $F : G \rightarrow \mathbb{R}$.

(heute: F Funktion mit k Ver\"anderl., f etc h\"angt von nur *einer* Variablen ab).

Sei $\vec{a} \in G$.

$$F(\vec{a}) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{a})(x_j - a_j)$$

ist hoffentlich die beste lineare Approximation; diese k\"onnen wir auch

$$F(\vec{a}) + \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{x} - \vec{a} \rangle = F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

Ansatz f\"ur quadratische Approximation:

$$H_F(\vec{a}) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \text{ ist symmetrische Matrix, Format } k \times k.$$

Ansatz also:

$$F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \underbrace{\frac{1}{2} {}^t(\vec{x} - \vec{a}) H_F(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})}_{\text{quadr. Form in } \vec{x} - \vec{a}}$$

Wird $F''(a)$ als die zu $H_F(\vec{a})$ geh\"orende quadr. Form aufgefasst, dann entsteht $F(\vec{a}) + F'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{F''(\vec{a})}{2}(\vec{x} - \vec{a})^2$. In Koordinaten hei\ss t das

$$F(\vec{a}) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F(\vec{a})}{\partial x_j}(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq k} \frac{\partial^2 F(\vec{a})}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

F\"ur eine kubische Approx. ist dazu noch zu addieren:

$$\% + \frac{1}{3!} \sum_{1 \leq i, j, l \leq k} \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(\vec{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_l - a_l) \text{ und so weiter!}$$

Existieren alle n -ten partiellen Ableitungen von F , dann betrachte

$$\frac{1}{n!} \sum_{\substack{1 \leq l_j \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{\partial^n F}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2} \dots \partial x_{l_n}}(\vec{a})(x_{l_1} - a_{l_1}) \dots (x_{l_n} - a_{l_n}) = P_n(\vec{x}, \vec{a})$$

Das n -te Taylorpolynom zu F ist dann

$$T_{F,\vec{a}}(\vec{x}) = F(\vec{a}) + P_1(\vec{x}, \vec{a}) + P_2(\vec{x}, \vec{a}) + \dots + P_n(\vec{x}, \vec{a})$$

Problem: Fehlerkontrolle zwischen F und seinem Taylorpolynom.

In der Nähe von $\vec{a} \in G$ seien alle n -ten partiellen Ableitungen stetig!

1. Schritt: verallgemeinere MWS. Sei $\vec{x} \in G$, die Strecke von \vec{a} nach \vec{x} sei ganz in G . Bild 41

$f(t) = F(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))$; $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ diffb. nach Kettenregel; $f'(t) = \nabla F(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})$
 $t \mapsto \vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})$ ist eingesetzt in F .

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) \text{ für ein } \xi \in (0, 1)$$

$$F(\vec{x}) - F(\vec{a}) = \nabla F(\vec{a} + \xi(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})$$

SATZ 1 (Mittelwertsatz in n Variablen). Sei $G \subset \mathbb{R}^k$ ein Gebiet, $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ sei diffbar in G . Seien $\vec{a}, \vec{x} \in G$, die Verbindungsgerade $\mathcal{O} = \{\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}), 0 \leq t \leq 1\}$ sei in G enthalten. Dann gibt es

$$\vec{\xi} \in \mathcal{O} \text{ mit } F(\vec{x}) - F(\vec{a}) = \nabla F(\vec{\xi})(\vec{x} - \vec{a})$$

Analog kann auf f der Taylorsche Satz in einer Variablen angewendet werden:

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)t^n + R(t); \quad t = 1$$

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + \nabla F(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2}f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

SATZ 2 (Taylorscher Satz, n Variable). Sei G wie in Satz 1, $n \in \mathbb{N}$ und $F: G \rightarrow \mathbb{R}$ habe stetige partielle Ableitungen auf G mindestens $n + 1$ -ter Ordnung.

Dann ist $F(\vec{x}) = T_{F,\vec{a}}(\vec{x}) + P_{n+1}(\vec{a}, \vec{\xi})$ mit $\xi \in \mathcal{O}$ (Negation wie in Satz 1)

denn: $f(t) = F(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))$. Wende darauf Taylor an: $f(t) = f(0) + f'(0)t + \dots$

Wähle $t = 1$ und wende Induktion an auf $f'(t) = \nabla F(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})$ an und erhalte Ausdruck für $\frac{f^{(l)}(0)}{l!} = P_l(\vec{a})$

Anwendung: lokale Extremwerte

Seien F, G etc. wie in Satz 2 mit $n = 1$ (d.h. F ist $2 \times$ stetig diffbar)

Es sei $\nabla F(\vec{a}) = 0$ (also \vec{a} Kandidat für lokales Extremum!)

Ist \vec{x} nahe bei \vec{a} , dann $\mathcal{O} \subset G$ (wegen G offen)

$$F(\vec{x}) = F(\vec{a}) + \frac{1}{2} {}^t \vec{\xi} H_F(\vec{a}) \vec{\xi} \text{ für ein } \vec{\xi} \in \mathcal{O}$$

Sind alle Eigenwerte von $H_F(\vec{a})$ positiv, dann ist \vec{a} Minimumstelle.

Sind alle Eigenwerte von $H_F(\vec{a})$ negativ, dann ist \vec{a} Maximum-Stelle.

Beispiel: $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x, y) = xye^{-x-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(e^{-x-y} - xe^{-x-y}) = y(1-x)e^{-x-y} \quad x=1$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} \quad y=1$$

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix}$$

5.6 Implizit gegebene Funktionen und Abbildungen

Bild 42

Bild 43

$$F : \underset{\subset \mathbb{R}^2}{G} \rightarrow \mathbb{R} : \{(x, y) : F(x, y) = 0\}$$

Frage: lässt sich die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach y auflösen? D.h.: gibt es eine Funktion g mit $F(x, g(x)) = 0$? Genauer:

Gegeben sei ein Punkt (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$. Gibt es $\epsilon > 0$, s.d. auf $|x - x_0| < \epsilon$ eine Funktion $g : U_\epsilon(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ex. mit $F(x, g(x)) = 0$?

Das kann höchstens dann funktionieren wenn $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann aber sollte es auch gehen!

Etwas allgemeiner: $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei ein Gebiet; Punkte im \mathbb{R}^{n+1} seien $(\vec{x}, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$

Gegeben sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nach y partiell stetig diffbar.

Betrachten $\mathcal{L} = \{(\vec{x}, y) \in G : F(\vec{x}, y) = 0\}$.

Sei $(\vec{x}_0, y_0) \in \mathcal{L}$. Gibt es $\epsilon > 0$ und eine Funktion $g : U_\epsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$ für $\vec{x} \in U_\epsilon(\vec{x}_0)$, dann heißt G eine Auflösung der Gleichung $F(\vec{x}, y) = 0$ nach y . Alternativ heißt g auch die durch $A(\vec{x}, y) = 0$ gegebene implizite Funktion.

SATZ über die implizite Funktion. Notation wie oben.

Ist $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Auflösung g auf $U_\epsilon(\vec{x}_0)$. Ist $g_0(\vec{x}) = y_0$ und

$$g_{k+1}(\vec{x}) = g_k(\vec{x}) - \frac{F(\vec{x}, g_k(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0)},$$

dann konvergiert die Fkt-folge g_k auf $U_\epsilon(\vec{x}_0)$ *gleichmäßig* gegen g .

Begründung mit Banach'schem Fixpunktsatz:

$$C(U_\epsilon(\vec{x}_0)) = \{f : U_\epsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ stetig}\}; \quad \|f\|_\infty = \max_{|x-x_0| \leq \epsilon} |f(x)|$$

Manipulation: $z_k(\vec{x}) = g_k(\vec{x}) - y_0$

$$z_{k+1}(\vec{x}) = z_k(\vec{x}) - \frac{F(\vec{x}, z_k(\vec{x}) + y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, y_0)}$$

$$\Phi : C(U_\epsilon(\vec{x}_0)) \circlearrowleft; \Phi(z)(\vec{x}) = z(\vec{x}) - \frac{F(\vec{x}, z(\vec{x}) + y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0)} \stackrel{!}{=} z(\vec{x})$$

Zeige: Φ ist eine Kontraktion. Dann liefert der Banach'sche Fixpunktsatz ein $z \in C(U_\epsilon(\vec{x}_0))$ mit $\Phi(z) = z$, und $g(\vec{x}) = y_0 + z(\vec{x})$ ist die Auflösung.

Seien $h_1, h_2 \in C(U_\epsilon(\vec{x}_0))$

$$\begin{aligned} \|\Phi(h_1) - \Phi(h_2)\|_\infty &= \max_{|x-x_0| \leq \epsilon} \left| h_1(\vec{x}) - h_2(\vec{x}) - \left(\frac{F(\vec{x}, h_1(\vec{x}) + y_0) - F(\vec{x}, h_2(\vec{x}) + y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|h_1 - h_2\| \end{aligned}$$

für genügend kleines $\epsilon > 0$, wenn auf den Zähler der MWS angewendet wird.

Beispiel: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \mathcal{L} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Bild 44

$$x_0 = 0, y_0 = 1 : g_0(x) = 1$$

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) - \frac{F(x, g_k(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) - \frac{1}{2}(x^2 + g_k(x)^2 - 1)$$

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$g_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x^2 + (1 - \frac{1}{2}x^2)^2 - 1) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \text{ (Taylorentwicklung von } g(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{)}$$

In diesem speziellen Fall sind die $g_k(x)$ die Taylorpolynome der (expliziten) Auflösung $\sqrt{1 - x^2}$.

Kraftvoll ist der Satz, wenn die Auflösung *nicht* durch elementare Funktionen beschrieben werden kann.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar. Sei $f'(x_0) \neq 0$.

$$\text{Bilde } F(x, y) = x - f(y) \quad F = 0 \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

Ist $x_0 = f(y_0)$ und $f'(y_0) \neq 0$, dann ist $F = 0$ lokal auflösbar, d.h. $\exists f^{-1}$.

Die Funktionenfolge

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) + \frac{x - f(g_k(x))}{f'(y_0)}$$

konvergent gegen die Umkehrung f^{-1} .

$$\left(F(x, g_k(x)) = x - f(g_k(x)) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -f'(y) \right)$$

Implizit gegebene Abbildungen.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x - y - z = 0$$

Bild 45

Wiederholung:

Implizite Funktionen: $f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2 = 0$

Bild 46

Bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, dort kann weder nach x noch nach y aufgelöst werden.

Bei $(\pm 1, 0)$ ist $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, es kann nur nach x aufgelöst werden:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - 4y^2}} \text{ für } |y| < \frac{1}{2}$$

Sonst $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, und $y = \pm \sqrt{x^2(1 - x^2)}$

SATZ 1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(\vec{x}_0, y_0) \in G$ und $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und partiell stetig nach y diffbar mit $F(\vec{x}_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ und eine stetige Funktion $g : U_\epsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$$

ZUSATZ: $\{(\vec{x}, y) \in G : F(\vec{x}, y) = 0\} \cap U_\epsilon(\vec{x}_0, y_0)$ ist genau der Graf von g

ZUSATZ 2. Ist F stetig diffbar, dann ist auch die "Auflösung" g differenzierbar, und aus

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, g(\vec{x})) = 0$$

liefert die Kettenregel

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} F(\vec{x}, g(\vec{x})) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}, g(\vec{x})) + \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, g(\vec{x})) \frac{\partial g}{\partial x_j},$$

also

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\vec{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\vec{x}, g(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, g(\vec{x}))}$$

Beispiel: Die Gleichung $\sin xy = xe^y - e\pi$ soll "nahe" der Lösung $x_0 = \pi$, $y_0 = 1$ "nach y aufgelöst werden

$$F(x, y) = \sin(xy) - xe^y + e\pi$$

hat $F(\pi, 1) = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cos(xy) - xe^y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 1) = \pi \cos \pi - \pi e < 0$$

Es gibt also $\epsilon > 0$ und $g : (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, g(x)) = 0$ und es gilt

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{g(x) \cos(xg(x)) - e^{g(x)}}{x \cos(xg(x)) - xe^{g(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(\pi) = -\frac{1 \cdot (\cos \pi) - e}{\pi \cos \pi - \pi e} = -\frac{1}{\pi}$$

Übung: Taylorentwicklung von g

Mehrere Gleichungen

Beispiel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x - y - z = 0$$

Bild 47

Analogie zur lin. Algebra? Dort: jede Gleichung reduziert die Dimension der Lösungsmenge um 1 (es sei denn, die Gleichungen sind "abhängig")

"Auflösen" heißt hier im Beispiel etwa Lösungsmenge als Graf etwa $(x, y(x), z(x))$ erkennen.

Lässt sich *hier* explizit berechnen: $y = x - z$ für y in $x^2 + (x - z)^2 + z^2 = 1$ eingesetzt gibt $z(x)$, analog $y(x)$.

SATZ 2 (über implizite Abbildungen).

Sei G

subset \mathbb{R}^{n+k} offen, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k)$ und $F : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ sei stetig diffbar. Schreibe

$$F = (F_1, \dots, F_k)$$

und

$$\mathcal{L} = \{(\vec{x}, \vec{y}) \in G : F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \dots = F_k(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}.$$

Sei $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathcal{L}$ und $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)\right)_{1 \leq i, j \leq k}$ invertierbar.

Dann gibt es eine Umgebung $U_\epsilon(\vec{x}_0)$ mit $\epsilon > 0$ und eine Abbildung $g : U_\epsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit

$$F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0; \quad g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$$

Ferner ist $\mathcal{L} \cap U_\epsilon((\vec{x}_0, \vec{y}_0))$ der Graf von g .

ZUSATZ: g ist diffbar mit

$$J_g(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \right)_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}^{-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i, j \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}(\vec{x}_0, g(\vec{x}_0))$$

Beispiel:

$$F_1(x, y_1, y_2) = x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0$$

$$F_2(x, y_1, y_2) = xy_1 + y_1y_2 + y_2x + 2 = 0$$

hat gemeinsame Nullstelle $(x, y_1, y_2) = (2, -1, 0)$

”Auflösen” nach y_1, y_2 ?? (mit x als ”Variable”?)

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 3y_1^2 & 3y_2^2 \\ x + y_2 & x + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 0$$

Es gibt also $\epsilon > 0$ mit Funktionen

$$g_i : (2 - \epsilon, 2 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{R},$$

die das System durch

$$F_1(x, g_1(x), g_2(x)) = F_2(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$$

”auflösen”, und die Ableitungsformel gibt

$$\begin{pmatrix} g_1'(2) \\ g_2'(2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(2, -1, 0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(2, -1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

5.7 Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten

Grobe Idee: eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n soll ”lokal” wie eine \mathbb{R}^d aussehen.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$; $L_d = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{d+1} = x_{d+2} = \dots = x_n = 0\}$ Bild 48

Eine d -dimensionale Karte in der Nähe von $\vec{m} \in M$ ist eine stetige, diffb. Abbildung $\varphi :$

$$U_\epsilon(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Bild 49

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\varphi : U_\epsilon(\vec{0}) \rightarrow \varphi(U_\epsilon(\vec{0}))$ ist bijektiv,
 $\det J_\varphi(\vec{x}) \neq 0$ für alle $\vec{x} \in U_\epsilon(\vec{0})$
- (ii) $\varphi(0) = \vec{m}$
- (iii) $M \cap \varphi(U_\epsilon(\vec{0})) = \varphi(L_d \cap U_\epsilon(\vec{0}))$

M heißt d -dim. (Unter-)Mannigfaltigkeit (des \mathbb{R}^n), wenn es zu jedem $\vec{m} \in M$ eine d -dim. Karte in der Nähe von \vec{m} gibt.

Ein *Atlas* einer solchen d -dim. Mannigfaltigkeit ist eine Menge von Karten, s.d. jedes $\vec{m} \in M$ im Bild mindestens *einer* Karte vorkommt.

(In Teilen der Literatur: Karte $\hat{=}$ Parametrisierung $\hat{=}$ lokales Koordinatensystem)

$G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, stetig diffbar, G offen, zusammenhängend.

Der Graf $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in G\}$ ist eine n -dim. Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+1}

Bild 50

Das wichtigste Beispiel: $G \subset \mathbb{R}^{n+k} \ni (\vec{x}, \vec{y})$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k)$. Seien $F_1, \dots, F_k : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann ist

$$\mathcal{L} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : F_1(\vec{x}, \vec{y}) = \dots = F_k(\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$$

eine n -dim. Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+k} , wenn an jeder Stelle $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+k}$ die Funktionalmatrix $J_{(F_1, \dots, F_k)}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ **Rang k hat**.

Beispiel: $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ist $(n-1)$ -dim. Mannigfaltigkeit.

Bild 51

Beispiele:

- (1) Grafen von Funktionen $f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{G} \rightarrow \mathbb{R}$ von einem Gebiet G ; f stetig diffbar, sind n -dim. Mannigfaltigkeiten $M = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \vec{x} \in G\}$ im \mathbb{R}^{n+1}

Sind Funktionen F_1, \dots, F_k auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und

$$\mathcal{L} = \{\vec{x} \in G : F_1(\vec{x}) = \dots = F_k(\vec{x}) = 0\}$$

Ist für jedes $\vec{x} \in \mathcal{L}$ die Matrix $J_{(F_1, \dots, F_k)}(\vec{x})$ vom Rang k , dann \mathcal{L} lokal der Graf einer Abbildung und deshalb eine $n-k$ -dim. Mannigfaltigkeit.

- (2) Jede Mannigfaltigkeit der Dim. d im \mathbb{R}^n lässt sich lokal durch $n - d$ Gleichungen $F_1 = \dots = F_{n-d} = 0$ beschreiben.

Denn: (siehe Bild) $x_{d+1} = \dots = x_n = 0$ beschreibt die "Koordinatenebene", transportiere mit Karte.

- (3) $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$
 $F(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1; \nabla F(\vec{x}) = 2\vec{x} \neq 0$ auf S^{n-1}
 S^{n-1} ist also eine $n - 1$ -dim. Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n .

Kartenabbildungen für S^{n-1}

Bild 52

$\varphi : S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv, in beide Richtungen diffbar.

Dies ist die "stereografische Projektion" vom Nordpol.

Allgemeiner: $S^{n-1} \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ lässt sich genauso auf $\{x_1, \dots, x_{n-1}, 0\}$ abbilden. Zusammen mit der stereografischen Projektion vom Südpol entsteht ein Atlas.

Ganz andere Karten liefern "Polarkoordinaten":

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi$$

Durch $(0, 2\pi) \rightarrow S^1, \varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$ entsteht eine Karte.

Durch $(-\pi, \pi) \rightarrow S^1, \varphi \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi)$ entsteht eine Karte.

Zusammen bilden diese einen Atlas.

- (4) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch; $q(\vec{x}) = {}^t \vec{x} A \vec{x}; Q = \{\vec{x} : q(\vec{x}) = 1\}$ ist $n - 1$ -dim. Mannigfaltigkeit
 Vorsicht: $q(\vec{x}) = 0$ beschreibt i.a. *keine* Mannigfaltigkeit!

$$\text{Beispiel: } x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$$

- (5) $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : {}^t A A = E_n\}$ "orthogonale Gruppe"

$$A = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

${}^t A A = E_n$ liefert $\frac{1}{2}n(n + 1)$ Gleichungen zwischen dem n^2 Variablen x_{11}, \dots, x_{nn}

$\Rightarrow O(n)$ ist eine $n^2 - \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n(n - 1)$ dim. Mgfkt im \mathbb{R}^n .

(2. Hälfte 19. Jh.: Sophus Lie studiert Mannigfaltigkeiten, die gleichzeitig Gruppen mit diffb. Gruppenoperationen sind; sehr wichtig in Physik; "Lie-Gruppen")

- (6) "Konfigurationsräume" in der Mechanik sind Mannigfaltigkeiten.

n "Massenpunkte" $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^3$. Zwischen diesen n Punkten bestehen durch k Fkt. F_1, \dots, F_k beschriebene Abhängigkeiten $F_j(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$ ($1 \leq j \leq k$).

Konkret: "Stab" der Länge 1, beschrieben durch Endpunkte $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3; \sum_{i=1}^3 (a_i - b_i)^2 = 1$; 5-dim. Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^6 heißt der Konfigurationsraum für den Stab.

Tangential- und Normalenraum.

Bild 53

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d -dim. Mannigfaltigkeit, $m \in M$. Ein $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in m , wenn es einen diffb. Weg

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = m; \quad \gamma'(0) = v.$$

$T_m M = \{\text{Tangentialvektoren in } m\}$. ist \mathbb{R} -VR, $\dim T_m M = d$

$N_m M = (T_m M)^\perp$ "Normalenraum"

$$N_m M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, v \rangle = 0 \forall v \in T_m M\}$$

Beispiel: $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. $m = (1, 0, \dots, 0)$

Bild 54

$$T_m S^{n-1} = \{(0, x_2, x_3); x_j \in \mathbb{R}\}.$$

$$N_m S^{n-1} = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

SATZ. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F_1, \dots, F_k : G \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig diffbar, $m \in \mathcal{L} = \{F_1(\vec{x}) = \dots = F_k(\vec{x}) = 0\}$ in m habe $J_{(F_1, \dots, F_k)}(\vec{m})$ Rang k . Dann ist $T_m \mathcal{L} = \{v : J_{(F_1, \dots, F_k)}(\vec{m})v = 0\}$

$$\vec{m} \in S^{n-1}. \quad F(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$$

$$\nabla F(\vec{x}) = 2\vec{x}$$

$$T_{\vec{m}} S^{n-1} = \{\vec{v} : \langle 2\vec{m}, \vec{v} \rangle = 0\}$$

(entspricht der Anschauung)

$$\text{Im } \mathbb{R}^n : x_{d+1} = \dots = x_n = 0$$

$$F(\vec{x}) = (x_{d+1}, \dots, x_n)$$

Im \mathbb{R}^n sei eine d -dim. Mannigfaltigkeit M gegeben durch $k = n - d$ diffb. Gleichungen

$$F_1(\vec{x}) = \dots = F_k(\vec{x}) = 0;$$

für $F = (F_1, \dots, F_k)$ habe $J_F(\vec{x})$ stets Rang k . Dann ist für jedes $\vec{m} \in M$

$$T_{\vec{m}} M = \text{Kern } F'(\vec{m}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : J_F(\vec{m})\vec{v} = 0\}$$

Beispiel: Neilsche Parabel im \mathbb{R}^2 .

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$$

Bild 55

$$\varphi : t \mapsto (t^2, t^3)$$

$$\varphi' = (2t, 3t^2) = (0, 0) \text{ bei } t = 0.$$

Übung: hier würde $T_{(0,0)} N = \{(0, 0)\}$ sein, also N keine Mannigfaltigkeit.

Beispiel: Ist M gegeben durch eine Gleichung

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

dann ist $J_F = \nabla F$ und $T_{\vec{m}}M = \{v : \langle v, \nabla F(\vec{m}) \rangle = 0\}$

Beispiel: im \mathbb{R}^2 :

Bild 56

$N_{\vec{m}}M =$ der von $\nabla F_1(\vec{m}), \dots, \nabla F_k(\vec{m})$ aufgespannter Raum

Die "Flächen" $F(\vec{x}) = \text{const.}$ heißen Niveauflächen von F .

Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten

Standard-Situation (wie vorher): M sei d -dim. Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n , beschrieben durch $k = n - d$ diffbr. Gleichung $F_1(\vec{x}) = \dots = F_k(\vec{x}) = 0$ mit $F = (F_1, \dots, F_k)$ und $J_F(\vec{m})$ vom Rang k für jedes $\vec{m} \in M$.

Diffbare Fkt. auf M . Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $\vec{m} \in M$.

Bild 57

Sei φ eine Karte mit $\varphi(\vec{0}) = \vec{m}$.

$$\mathcal{L}_d = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{d+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Dann wird $f \circ \varphi : U_\epsilon(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}$ auf "stetig", "diffb.", stetig diffb. etc. getestet.

Ist für jede Karte diese Eigenschaft erfüllt, dann heißt f stetig/diffb./stetig diffb. auf M .

Geometrische Überlegung:

unnützes Bild

Lagrange'sche Multiplikatorenregel. Sei M eine d -dim. Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n , gegeben durch obige Standardsituation. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar; die Einschränkung von f auf M habe $\vec{m} \in M$ ein lokales Extremum. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(\vec{m}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla F_i(\vec{m})$$

Die λ_j heißen Lagrange-Multiplikatoren.

Beispiel: f ist zu maximieren/minimieren unter den "Nebenbedingungen" $F_1 = \dots = F_k = 0$
 $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1; x_j > 0 (1 \leq j \leq n)$

Bild 58

$$f(\vec{x}) = x_1 x_2 \dots x_n$$

Mit Rand ist die Fläche $x_1 + \dots + x_n = 1$, $x_j \geq 0$ kompakt, es ist $f(\vec{x}) > 0$ auf der Fläche ohne Rand, $= 0$ auf dem Rand.

Also hat f ein positives Max. im "Inneren" der Fläche.

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{f(\vec{x})}{x_1}, \frac{f(\vec{x})}{x_2}, \dots, \frac{f(\vec{x})}{x_n} \right)$$

$$\nabla F = (1, \dots, 1)$$

Ist x die Max-Stelle, dann $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{f(\vec{x})}{x_j} = \lambda \quad (j = 1, \dots, n)$$

$\lambda \neq 0$ wegen $f(\vec{x}) \neq 0$, dann folgt $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ (wegen $F = 0$)

Also ist das Maximum von $x_1 x_2 \dots x_n$ unter der Nebenbedingung $x_1 + \dots + x_n = 1$, $x_j > 0$ genau $\left(\frac{1}{n}\right)^n$

Ungleichung zw. geom. und arithm. Mittel:

Gegeben seien $a_1, \dots, a_n > 0$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{a_1, \dots, a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$$

denn: $x_j = \frac{a_j}{a_1 + \dots + a_n} = x_1 + \dots + x_n = 1$, also $x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{(a_1 + \dots + a_n)^n} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad // \quad a_1 a_2 \dots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)^n \quad \checkmark$$

Beispiel 2: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch; $q(\vec{x}) = {}^t \vec{x} A \vec{x}$ in der Rolle von f

Nebenbedingung: $F_0(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$

Bild für $n = 2$ und $q = x_1^2 - x_2^2$

Bild 59

Gesucht sind Min. und Max. von $q(\vec{x})$ auf $\vec{x} \in S^{n-1}$.

Behauptung: da S^{n-1} kompakt, gibt's diese, und an diesen Stellen sind EV von A .

$$q(\vec{x}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j} x_1 x_j + \text{Terme, die } x_1 \text{ nicht enthalten.}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}(\vec{x}) = 2a_{11} x_1 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j = 2 \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = 2 \langle 1, \text{Zeile von } A, \vec{x} \rangle$$

$$\nabla q(\vec{x}) = 2 {}^t \vec{x} A; \quad \nabla F_0 = 2 \vec{x} \quad 2 {}^t \vec{x} A = 2 \lambda \vec{x}$$

6 Mehrdimensionale Integration

6.1 Regelfunktion auf \mathbb{R}^n

Erinnerung: Integration von Fkt. $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit I kompakt.

1. Schritt: Treppenfunktion integrieren.

Bild 60

$$\int_a^b t dx := \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) t \left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2} \right)$$

Bild 61

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists t : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit $|f(x) - t(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$.

$$\text{d.h. } \|f - t\|_\infty < \epsilon \quad \|h\|_\infty = \max_{x \in I} |h(x)|$$

Wähle t_n mit $\|f - t_n\| < \frac{1}{n}$,

$$\int_a^b f dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n dx$$

Ist f_n eine Folge Regelfkt. mit $\|f_1 - f\| \rightarrow 0$, dann ist auch f Regelfkt.

Nachbau im \mathbb{R}^n : ein **Quader** $Q \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i\} = Q$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^n, \vec{b} \in \mathbb{R}^n, a_i < b_i$

Eine solche Menge heißt genauer offener Quader.

Es kann auch mit $a_i \leq x_i \leq b_i$ oder $a_i \leq x_i < b_i$ gearbeitet werden, für Theorie irrelevant.

$$\text{vol}(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Bild 62

Definition (Treppenfunktionen): $Q \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Quader, $t : Q \rightarrow \mathbb{R}$.

t heißt Treppenfkt., wenn es endlich viele $Q_j \subset Q$ mit $\bigcup Q_j = Q$ gibt, s.d. t auf Q_j konstant ist.

Bild 63

Das Elementarintegral von t ist definiert durch

$$\int_Q t d\vec{x} := \sum_j \text{vol}(Q_j) t(Q_j)$$

Eigenschaften des Elementarintegrals

(1) $T(Q) = \{t : Q \rightarrow \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion}\}$ ist ein \mathbb{R} -VR und $\int : T(Q) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_Q t \, d\vec{x}$ ist linear

denn: mit $t \in T(Q)$ ist $\lambda t \in T(Q) \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$t_1, t_2 \in T(Q) \stackrel{?}{\Rightarrow} t_1 \pm t_2 \in T(Q)$

Bild 64

Es gibt stets eine Zerlegung in Quader, so dass *gleichzeitig* t_1 und t_2 auf jedem Teilquader konstant sind

(2) Sind $t_1, t_2 \in T(Q)$, dann gilt auch $\max(t_1, t_2), \min(t_1, t_2) \in T(Q)$

Sind $t_1, t_2 \in T(Q)$, dann zerlege Q in Quader Q_1, \dots, Q_r , s.d. t_1 und t_2 auf Q_j konstant sind.

$$\int (t_1 + t_2) d\vec{x} = \sum_{j=1}^r \text{vol}(Q_j)(t_1(Q_j) + t_2(Q_j)) = \int t_1 d\vec{x} + \int t_2 d\vec{x}$$

(3) Sind $t_1, t_2 \in T(Q)$ mit $t_1(x) \leq t_2(x) \forall x \in Q$, dann gilt auch $\int_Q t_1 d\vec{x} \leq \int_Q t_2 d\vec{x}$ (Monotonie des Elementarintegrals)

denn: wird Q in Q_j zerlegt, so dass t_1 und t_2 auf Q_j konstant,

$$\int t_1 d\vec{x} = \sum \text{vol}(Q_j)t_1(Q_j) \leq \sum_{j=1}^r \text{vol}(Q_j)t_2(Q_j) = \int t_2 d\vec{x}$$

(4) $t \in T(Q) \Rightarrow |t| \in T(Q)$, und $|\int t d\vec{x}| \leq \int |t| d\vec{x}$ (Dreiecksungleichung)

denn: $|t| \in T(Q)$ klar.

$$t(x) \leq |t(x)|, \quad -t(x) \leq |t(x)|$$

$$\int t dx \stackrel{(3)}{\leq} \int |t| dx \quad - \int t dx \leq \int |t| dx$$

$$\text{also } |\int t dx| \leq \int |t| dx$$

Bild 65

Definition: $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $t \in T(Q)$ mit

$$\|f - t\|_\infty < \epsilon$$

SATZ 1. Ist Q ein abgeschlossener Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f Regelfunktion (denn: siehe HM1 für $n = 1$, bleibt wörtlich richtig).

Definition des Regelintegrals: sei f eine Regelfunktion.

Dann gibt es Treppenfkt. t_k mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - t_k\|_\infty = 0$

$\Rightarrow t_k$ ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, d.h. $\forall \epsilon > 0$ ist $\|t_k - t_l\| < \epsilon \forall k, l > N(\epsilon)$

$\Rightarrow |\int t_k dx - \int t_l dx| < \epsilon \text{vol}(Q)$

Also ist $\int t_k dx$ eine CF in \mathbb{R} , konvergiert deshalb, und wir def.

$$\int_Q f d\vec{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q t_k d\vec{x}$$

Wir müssen noch zeigen, dass diese Def. *nicht* von der Auswahl der t_k abhängt. Ist etwa $t_k^* \in T(Q)$ ebenfalls mit $\|t_k^* - f\|_\infty \rightarrow 0$, dann ist $\int (t_k - t_k^*) d\vec{x} \rightarrow 0$ zu zeigen.

$$|t_k(x) - f(x)| < \epsilon \forall \vec{x} \in Q$$

$$|t_k^*(x) - f(x)| < \epsilon \forall \vec{x} \in Q$$

$k \geq N(\epsilon)$

$$\int_Q |t_k(x) - t_k^*(x)| dx \leq 2\epsilon \text{vol}(Q)$$

SATZ. Sei Q ein abgeschlossener Quader. $R(Q) = \{f : Q \rightarrow \mathbb{R}, \text{Regelfkt.}\}$. Dann $R(Q)$ ein \mathbb{R} -VR, die Abb.

$\int : R(Q) \rightarrow \mathbb{R}; f \mapsto \int_Q f d\vec{x}$ ist linear und monoton:

$f, g \in R(Q)$ mit $f(x) \leq g(x) \forall \vec{x} \in Q \Rightarrow \int f d\vec{x} \leq \int g d\vec{x}$;

Ist $f \in R(Q)$, dann ist auch $|f| \in R(Q)$, und es gilt

$$|\int_Q f dx| \leq \int_Q |f| d\vec{x} \text{ Dreiecksungleichung}$$

$$\|t_k - f\| \rightarrow 0$$

$$\|s_k - g\| \rightarrow 0$$

$$t_k' = \min(t_k, s_k) \rightarrow f$$

$$s_k; = \max(t_k, s_k) \rightarrow g$$

Bild 66

$f \in R(Q) :\Leftrightarrow$ für jedes $\epsilon > 0 \exists t \in T(Q)$

mit $\sup_{\vec{x} \in Q} |t(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \epsilon$; mit anderen Worten

$$\|t - f\|_\infty < \epsilon$$

Ist $f \in R(Q)$ und $t_k \in T(Q)$ mit $\|f - t_k\| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), dann ex. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q t_k d\vec{x}$; und dieser Grenzwert ist für alle solchen Folgen t_k *derselbe*.

Deshalb setze

$$\int_Q f(\vec{x}) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q t_k d\vec{x}$$

Bild 67

SATZ 3. Ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, dann ist $R(Q)$ *vollständig*, und das Integral $\int : R(Q) \rightarrow \mathbb{R}$ ist *stetig*, wenn auf $R(Q)$ die Norm $\| \cdot \|_\infty$ gegeben ist.

Was soll das? Seien $f_k \in R(Q)$, die bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ eine CF bilden:

$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$, s.d. $\forall k, l > N$

$$\|f_k(\vec{x}) - f_l(\vec{x})\|_\infty < \epsilon$$

$\Rightarrow \forall \vec{x} \in Q : |f_k(\vec{x}) - f_l(\vec{x})| < \epsilon$

$f_k(\vec{x})$ sind CF in \mathbb{R} , also konv.

$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) =: f(\vec{x})$

Jetzt $l \rightarrow \infty$:

$$|f_k(\vec{x}) - f(\vec{x})| \leq \epsilon$$

$\Rightarrow \|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$

$f \in R(Q)$, denn zu $\epsilon > 0$ wähle k mit $\|f - f_k\| < \epsilon$, mit $t \in T(Q)$ mit $\|f_k - t\| < \epsilon$

Also $\|f - t\| < 2\epsilon$. Ferner ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k d\vec{x} = \int_Q f d\vec{x}$, denn

$$\left| \int_Q f_k d\vec{x} - \int_Q f d\vec{x} \right| \leq \int_Q |(f_k - f)| dx \leq \int_Q \|f_k - f\|_\infty dx = \text{vol}(Q) \|f_k - f\|$$

Integration über allgemeine Mengen:

$Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $G \subset Q$ zunächst beliebig.

$$\mathbb{1}_G(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in G \\ 0 & \vec{x} \in Q \setminus G \end{cases}$$

G heißt (R-)messbar, wenn $\mathbb{1}_G \in R(Q)$;

$\text{vol}(G) := \int_Q \mathbb{1}_G(\vec{x}) d\vec{x}$ heißt Volumen (oder Inhalt) von G . Insbesondere ist jeder Quader messbar. Ist $f \in R(Q)$ und G messbar, $G \subset Q$, dann ist $\mathbb{1}_G f \in R(Q)$, wir schreiben

$$\int_Q \mathbb{1}_G(\vec{x}) f(\vec{x}) d\vec{x} =: \int_G f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Welche Menge sind messbar?

Prinzip: eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ ist sicher dann messbar, wenn es einen Quader Q gibt mit $G \subset Q$ gibt und der "Rand" von G aus endlich viele Mannigfaltigkeiten besteht.

Bild 68

Dabei sei der "Rand" von G , in Zeichen ∂G ("Rand von G ") wie folgt definiert:

$$g \in \partial G \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$$

$U_\epsilon(g) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - g\| < \epsilon\}$ sowohl Pkt in G als auch in $\mathbb{R}^n \setminus G$ enthält.

Warnung: ∂G kann, muss aber nicht Teil von G sein!

Insbesondere sind durch diffb. Gleichungen beschriebene Mengen messbar.

6.2 Sukzessive Integration

SATZ 1 (Fubini). Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f \in R(Q)$. Dann gilt

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1,$$

wenn $Q = \{x_i \in [a_i, b_i]\}$

Beispiel: im \mathbb{R}^2 sei

Bild 69

Dann ist $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq r; y^2 \leq x\}$, also messbar.

$$\begin{aligned} \text{vol}(G) &= \int_G d(x, y) = \int_{\substack{0 \leq x \leq r \\ 0 \leq y \leq r}} \mathbf{1}_G(x, y) d(x, y) \quad \boxed{|y| \leq \sqrt{x}} \\ &= \iint \mathbf{1}_G(x, y) dy dx = \int_0^r \int_{-\sqrt{|x|}}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^r 2\sqrt{x} dx = \frac{4}{3} r^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Berechne zur Übung vol von Kreis und Kugel im \mathbb{R}^3 !

Beweisskizze für Satz 1: $n = 2$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Fubini für Treppenfkt:

$Q \subset \mathbb{R}^n$, $t \in T(Q)$ mit Quadern Q_1, \dots, Q_r . Dann ist $t = \sum t(Q_j) \mathbf{1}_{Q_j}$.

Es genügt also, Fubini für $\mathbf{1}_Q$ nachzurechnen.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{1}_Q d\vec{x} &= \text{vol } Q = \prod (b_i - a_i) \quad Q : a_i \leq x_i \leq b_i \\ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} \mathbf{1}_Q(x_1, \dots, x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 &= (b_n - a_n)(b_{n-1} - a_{n-1}) \dots (b_1 - a_1) \end{aligned}$$

Also gilt Fubini für Treppenfunktionen.

Hilfssatz. Sei $t \in T(Q)$. Dann ist

$$\int_{a_n}^{b_n} t(\vec{x}) dx_n = t'(\vec{x}') \in T(Q')$$

$$Q = \{\vec{x} : a_i \leq x_i \leq b_i\} = Q'x[a_n, b_n]$$

$$Q' = \{\vec{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} : a_i \leq x_i \leq b_i \ (1 \leq i \leq n-1)\}$$

Es genügt, dies für $\mathbf{1}_Q$ zu verifizieren.

Durch Nachrechnen o.k.

LEMMA. Sei $f \in R(Q)$. Dann ist

$$F(\vec{x}') := \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_n \in R(Q')$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $t \in T(Q)$ mit $|f(\vec{x}) - t(\vec{x})| < \epsilon \ \forall \vec{x} \in Q$

Bei $\vec{x}' \in Q'$ fest ist t Fkt. von x_n , als solche Treppenfkt. $\Rightarrow f$ ist also Fkt. von x_n Regelfunktion.

\Rightarrow es gibt $F(\vec{x}')$

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_n - \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} t(\vec{x}) dx_n}_{\text{Treppen}} \right| \leq \epsilon(b_n - a_n)$$

Wiederholung Sukzessive Integration:

$$Q \subset \mathbb{R}^n; \quad Q = [a_1, b_1]x \dots x[a_n, b_n]$$

$f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ **Regelfunktion**

SATZ 1 (Fubini).

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$$

Insbesondere ist $\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n$ eine Regelfunktion von $\vec{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

(1) Der Satz ist ok. für $t \in T(Q)$.

(2) Wähle $t_k \in T(Q)$ mit $\|f - t_k\|_\infty \rightarrow 0 \ (k \rightarrow \infty)$.

$$\text{Dann } \boxed{\int_Q t_k(\vec{x}) d\vec{x}} \rightarrow \int_Q f(\vec{x}) d\vec{x}$$

(3) $t_k \in T(Q)$. Dann $\int_{a_n}^{b_n} t_k(\vec{x}', x_n) dx_n =: T_k(\vec{x}') \in T(Q')$ mit $Q' = [a_1, b_1]x \dots [a_{n-1}, b_{n-1}]$.

$T_k(\vec{x}') \rightarrow \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}', x_n) dx_n =: F_k(\vec{x}')$; Regelfunktion als Grenzwert der $T_k(\vec{x}')$.

$$\boxed{\int_{Q'} T_k(\vec{x}') d\vec{x}'} \rightarrow \int_{Q'} F_k(\vec{x}') d\vec{x}' = \int_{Q'} \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}) dx_n d\vec{x}'$$

(4) Die Kästen sind gleich, weil der Satz 1 für $T(Q)$ gilt. Also

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{Q'} \int_{a_n}^{b_n} f(\vec{x}', x_n) dx_n d\vec{x}'$$

(5) Induktion über n

2 Beispiele: $Q = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1 \ (i = 1, 2)\}$.

$f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $g(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$ sind stetig und deshalb $\in R(Q)$

$$\int_Q f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1 dx_1 \int_0^1 x_2 dx_2 = \frac{1}{4}$$

$$\int_Q g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 e^{x_1 x_2} dx_2 dx_1$$

$$\int_0^1 e^{x_1 x_2} dx_2 = \frac{e^{x_1 x_2}}{x_1} \Big|_{x_2=0}^{x_2=1} = \frac{e^{x_1}}{x_1} - \frac{1}{x_1} \quad (x_1 \neq 0)$$

$$e^{x_1} = 1 + x_1 + \frac{x_1^2}{2} + \dots$$

$$\int_0^1 e^{x_1 x_2} dx_2 = 1 \text{ für } x_1 = 0$$

Die Funktion $F(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $F(0) = 1$ ist auf $[0, 1]$ stetig, und es gilt

$$\int_{[0,1]^2} e^{x_1 x_2} = \int_0^1 F(x) dx; \text{ dies kann z.B. mit}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ durch eine schnell konvergente Reihe angegeben werden.}$$

Wir sehen später: ist $g(x_1, x_2)$ stetig, dann ist $\int_a^b g(x_1, x_2) dx_2$ wieder stetig in x_1 . Die Stetigkeit von F im obigen Beispiel ist also *nicht* zufällig.

Manchmal berechnet dies Grenzwerte.

6.3 Die Transformationsformel

Ziel: n -dim. Variante für "Substitution": $x = \varphi(t)$

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

SATZ 1 (Transformationsformel). Sei G messbar mit $G \subset \mathbb{R}^n$; dabei ist Q ein Quader. Ferner sei $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine diffbare Abbildung, $\Phi : G \rightarrow \Phi(G)$ sei bijektiv mit diffb. Umkehrung. Dann gilt

$$\int_{\Phi(G)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_G f(\Phi(\vec{t})) |\det J_\Phi(\vec{t})| d\vec{t}$$

1. Wie kommt $\det J_\Phi$ in die Formel?

Ist $f = \mathbb{1}_Q$ der Indikator eines Quaders und $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear, dann ist $\Phi(Q)$ ein Spat/Parallellflach; $\text{vol } \Phi(Q) = |\det \Phi| \text{vol } Q$

Weil Φ linear ist, ist J_Φ die Φ darstellende Matrix zur kanonischen Basis; $\det J_\Phi = \det \Phi$
 \Rightarrow Transfo-Formel gilt für Treppenfkt. und lineares Φ .

Idee: approx. f durch Treppenfkt. und Φ durch $\Phi(\vec{x}) + J_\Phi(x)\vec{x}$. \rightarrow Königsberger Analysis 2

Beispiel: Transformation auf Polarkoordinaten im \mathbb{R}^2

Im \mathbb{R}^2 seien x, y die eukl. Koordinaten;

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta \quad \text{Bild 70}$$

Wir haben also $\Phi : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $(r, \vartheta) \mapsto (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$ ist diffbar; Umkehrung ist diffbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \geq 0\}$

$$J_\Phi(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r \cos \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r \sin \vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det J_\Phi(r, \vartheta) = r(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = r$$

$$\boxed{\int_{\Phi(G)} f(x, y) d(x, y) = \int_G f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r d(r, \vartheta)}$$

Konkreter: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$; $K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$G = \{(r, \vartheta) : 0 < r \leq R, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$. Dann $\Phi(G) = K_R \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} \int_{K_R} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_G e^{-r^2} r d(r, \vartheta) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\vartheta dr &= 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} dr \\ \frac{d}{dt} e^{-t^2} &= -2te^{-t^2} &&= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^R = \pi - \pi e^{-R^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

SATZ 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

6.4 Parameterintegrale

$$F(y) := \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4+y^4} \quad (1)$$

$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Stetig? Diffb?

Wie wird F' berechnet?

Allgemeiner:

$$F(\vec{y}) := \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \quad (*)$$

Problem: wie übertragen sich Stetigkeit/Diffbar von f auf F ?

Annahmen an f :

Sei $G \subset \mathbb{R}^k$, Gebiet. Für jedes $\vec{y} \in G$ sei $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \in R(Q)$. Dann kann F durch $(*)$ definiert werden; "Parameterintegral". Dabei ist $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader.

Bemerkung: ist $U \subset Q$ messbar, dann ist

$$\int_U f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} = \int_Q \mathbf{1}_U(\vec{x}) f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x};$$

das ist Parameterintegral zu

$$f^*(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}) \mathbf{1}_U(\vec{x}),$$

also nichts Neues.

Sei zusätzlich für jedes $\vec{x} \in Q$, $G \rightarrow \mathbb{R}$; $\vec{y} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ stetig. Bleibt F in \vec{y} stetig?

$$|F(\vec{y}) - F(\vec{y}_0)| \leq \int_Q |f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y}_0)| d\vec{x}$$

Ist $\max_{\vec{x} \in Q} |f(\vec{x}, \vec{y}) - f(\vec{x}, \vec{y}_0)| < \epsilon$ für $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|$ klein, dann $|F(\vec{y}) - F(\vec{y}_0)| < \epsilon \cdot \text{vol } Q$

Insbesondere ist F stetig sobald $f(\vec{x}, \vec{y})$ stetig in $(\vec{x}, \vec{y}) \in Q \times G$ ist. Das Beispiel (1) ist von diesem Typ.

SATZ 1. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $G \subset \mathbb{R}^k$ Gebiet, für jedes $\vec{y} \in G$ sei $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \in R(Q)$, für jedes $\vec{x} \in Q$ sei $\vec{y} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ stetig. Es gebe $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(\vec{x}, \vec{y})| \leq c$ für alle $\vec{x} \in Q$, $\vec{y} \in G$.

Dann ist $F(\vec{y}) = \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$ stetig auf G .

Betrachte jetzt $f(\vec{x}, \vec{y})$, die nach y partiell *stetig* diffbar ist.

$$\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \int_Q \frac{f(\vec{x}, y) - f(\vec{x}, y_0)}{y - y_0} d\vec{x} \stackrel{\text{MWS}}{=} \int_Q \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, \eta) d\vec{x}$$

mit η zwischen y und y_0

$$\xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_Q \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, y_0) d\vec{x}$$

SATZ 2. Sei f wie in Satz 1. Zusätzlich sei für jedes $\vec{x} \in Q$; $y \rightarrow f(\vec{x}, y)$ stetig nach y diffbar. Dann ist auch $F(y) = \int_Q f(\vec{x}, y) d\vec{x}$ stetig diffbar, und es gilt

$$F'(y) = \int_Q \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, y) d\vec{x}$$

$$F(y) := \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^4 + y^4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{1 + x^4 + y^4} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-4y^3}{(1 + x^4 + y^4)^2} dx \end{aligned}$$

SATZ 3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, und $f(\vec{x}, \vec{y})$ sei wie in Satz 1 und zusätzlich nach \vec{y} diffbar mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y})$. Dann ist

$$F(\vec{y}) = \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$$

nach \vec{y} stetig diffbar, und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_Q \frac{\partial f}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$$

6.5 Uneigentliche Integrale

$$\int_0^{\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx$$

Bild 71

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ tut's! (HM 1)}$$

Bild 72

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int 0 dx_2 = 0$$

Bild 73

Abhilfe schafft:

$$Q_N = \{\vec{x} : |x_j| \leq N : (1 \leq j \leq n)\}$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion auf *jedem* endlichen Quader. f heißt (uneigentlich) int-bar über \mathbb{R}^n wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für jede kompakte messbare Menge K mit $K \cap Q_N = \emptyset$ gilt $|\int_K f dx| < \epsilon$.

Bild 74

$$\text{Dann existiert } \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{Q_N} f(\vec{x}) d\vec{x} : \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Wichtiger Spezialfall: f wie vorher, aber mit $f(\vec{x}) > 0$. Dann ist

$$\int_{Q_N} f(\vec{x}) d\vec{x} \text{ monoton wachsend in } N.$$

Ist dies als Funktion von N beschränkt, dann ex.

$$\sup_N \int_{Q_N} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Majorantenkriterium: seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beides Regelfunktionen auf jedem Quader, es sei $|g(x)| \leq f(x)$, und das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d\vec{x}$ existiere. Dann ex. auch $\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}) d\vec{x}$, und es gilt

$$|\int g(\vec{x}) d\vec{x}| \leq \int |g(\vec{x})| d\vec{x} \leq \int f(\vec{x}) d\vec{x}$$

denn für jedes K ist $|\int_K g(x) dx| \leq \int_K f(\vec{x}) d\vec{x}$

Beispiel 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ ex. für } \alpha > 1, \text{ denn } \int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^t$$

$$\|\vec{x}\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \quad f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^\alpha} \text{ für } \|\vec{x}\|_\infty \geq 1, \quad 0 \text{ für } \|\vec{x}\|_\infty < 1.$$

$$\int_{Q_N} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=2}^N \int_{Q_j \setminus Q_{j-1}} \frac{1}{\|\vec{x}\|^\alpha} d\vec{x} \leq 2^n \sum_j (j-1)^{-\alpha} \underbrace{j^{n-1}}_{\text{vol } Q_j \setminus Q_{j-1}}$$

Bild 75

SATZ. Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{x}: \|\vec{x}\|_\infty \leq 1\}} \|\vec{x}\|_\infty^{-\alpha} d\vec{x}$$

existiert genau für $\alpha > n$; für $\alpha \leq n$ ist

$$\int_{1 \leq \|\vec{x}\|_\infty \leq N} \|\vec{x}\|^{-\alpha} d\vec{x}$$

in N nicht beschränkt. *Dasselbe gilt für $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ anstelle von $\|\cdot\|_\infty$.*

Trick dazu.

$$\|\vec{x}\|_\infty = 1 \text{ oder } N$$

Bild 76

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2$$

Deshalb nicht Majoranten-Krit.

$$\int_{\|\vec{x}\|_\infty < 1} \frac{1}{\|\vec{x}\|^\alpha}$$

Uneigentliche Integrale, 2. Teil

SATZ 1. $\int_{\substack{\|\vec{x}\| \geq 1 \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n}} \frac{d\vec{x}}{\|\vec{x}\|^\alpha}$ konvergent für $\alpha > n$, für $\alpha \leq n$ nicht.

Majorantenkriterium: ist $f \in R(Q)$ für jeden Quader Q , über ganz \mathbb{R}^n int-bat, und ist $g \in R(Q)$ für jeden Quader mit $|g(\vec{x})| \leq f(\vec{x})$, dann ex. auch $\int_{\mathbb{R}^n} g(\vec{x}) d\vec{x}$, und es $|\int g(\vec{x}) d\vec{x}| \leq \int |g(\vec{x})| d\vec{x} \leq \int f(\vec{x}) d\vec{x}$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k \leq N \\ l \leq N}}$$

Bild 77

SATZ 2 (Fubini für uneigentliche Integrale).

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen des Majoranten-Kriteriums. Dann gilt $\int_Q g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Jede andere Reihenfolge der Integration rechts nach x_1, \dots, x_n ist ebenfalls möglich.

Bsp.: $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ Für $r > 1$ gilt $e^{-r^2} \leq Cr^{-4}$ Nach Majoranten-Krit. ist e^{-r^2} über \mathbb{R}^2 int-bar

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2} d\vec{x} &= \pi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \right) dx_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Punktsingularitäten

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =: \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ ex. für $\alpha < 1$, sonst nicht.

Sei $f : G \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $x_0 \in G$ (" \vec{x}_0 Punktsingularität") Bild 78

Wir nehmen an, dass $\vec{x}_0 = \vec{0}$ (sonst substituiere $\vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{x}_0$)

f sei $\in R(Q)$ für jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset G \setminus \{\vec{x}_0\}$

Bild 79

Integration über Punktsing. in $\vec{0}$ von f kann mit Transfo-Formel und $\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$ auf uneigentliche Integrale über \mathbb{R}^n zurueckgefuehrt werden.

Direkte Definition: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\vec{0} \in G$.

$f : G \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $R(Q)$ für jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset G \setminus \{\vec{0}\}$

f ist uneigentlich int-bar über G , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede messbare kompakte Menge $K \subset \{0 < \|\vec{x}\| \leq \delta\}$ gilt

$$\left| \int_K f(\vec{x}) d\vec{x} \right| < \epsilon$$

Wegen Trafo-Formel gelten Majoranten-Kriterium und Fubini auch für diese uneigentlichen Integrale.

Beispiel: $\int_{\|\vec{x}\|_{\infty} \leq 1} \|\vec{x}\|_{\infty}^{-\alpha} d\vec{x}$ konvergiert nach Trafo-Formel für $\alpha < n$.

SATZ 3. Ist $\|\cdot\|$ eine der Normen $\|\cdot\|_{\infty}, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf dem \mathbb{R}^n , dann ex. das Integral

$$\int_{\|\vec{x}\| \leq 1} \|\vec{x}\|^{-\alpha} d\vec{x} \text{ genau für } \alpha < n$$

Beispiel: $\int_{[0,1]^2} \frac{d(x,y)}{1-xy}$; Integral ist stetig, positiv bis auf Punkt singularität in $(x,y) = (1,1)$

SATZ (von Tonelli). ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ und existiert

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$, dann ex. auch $\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) d\vec{x}$.

$$\int_{[0,1]^2} \frac{d(x,y)}{1-xy} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k dx \int_0^1 y^k dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Transfo-Formel: $x = u + v, y = u - v \quad 2u = x + y, 2v = x - y$

Bild 80 $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \quad (x,y)_{u=\frac{1}{2}, 0=\frac{1}{2}} = (1,0)$

$$\int_{[0,1]^2} \frac{d(x,y)}{1-xy} = 2 \int_G \frac{d(u,v)}{1-(u+v)(u-v)} = 2 \int_G \frac{d(u,v)}{1+v^2-u^2} = 4 \int_{G \cap \{v>0\}} \frac{d(u,v)}{1-u^2+v^2}$$

Innen nach v integrieren liefert arctan, dann nach $u \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$

Ausblick: uneigentliche Parameterintegrale

typische Beispiele: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Regelfunktion über jeden Q ; $|f|$ sei über \mathbb{R}^n int-bar. zu $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\hat{f}(\vec{y}) = \int_{-\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} d\vec{x};$$

wegen $|e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}| = 1$ ex. dieses Integral für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} = f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} (-2\pi i x_1)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt; \quad f(0) = \sqrt{\pi}$$

$$f'(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sin(xt) dt \quad \frac{d}{dt} e^{-t^2} = -2te^{-t^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} e^{-t^2} \right) \sin(xt) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{-t^2} \sin(xt) \right)_{-\infty}^{\infty} - x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = -\frac{x}{2} f(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{2} f(x)$$

$$f(x) = e^{-cx^2}$$

$$f'(x) = f(x)(-2cx); \text{ ist Lösung mit } c = \frac{1}{4}.$$

$$f(x) = \alpha e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

6.6 Das Lebesque-Integral

ist das "richtige" Integral für:

- Quantenmechanik
- in den Anwendungen auftretende part. DGL

und ist *simpler* in der Handhabung, aber "etwas unanschaulich"

$t \in T(Q)$

$\|t\|_1 = \int |t| d\vec{x}$

Vervollständigung bzgl. $\|\cdot\|_1$ liefert L-Integral.

Nullmengen: eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(Q_j) < \epsilon$$

Jede abzählbare Menge ist eine Nullmenge; insbesondere \mathbb{Q} Nullmenge \mathbb{R} , denn $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$; zu x_j wähle einen Quader Q_j mit $\text{vol } Q_j = \frac{\epsilon}{2^j}$ und $x_j \in Q_j$.

$$\sum \text{vol } Q_j = \sum \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon$$

Geraden im \mathbb{R}^2 (oder \mathbb{R}^n , $n \geq 2$) sind *Nullmengen*.

Bild 81

Jede Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n mit $\dim \leq n - 1$ ist ebenfalls *Nullmenge*.

Idee für das Lebesgue-Integral: in \mathbb{R} ist jede monotone und beschränkte Folge konvergent.

SATZ 1. Seien $t_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen ($t_k \in T^{(n)} = \bigcup_{Q \subset \mathbb{R}^n} T(Q)$) mit $t_k(\vec{x}) \leq t_{k+1}(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gebe ein $A \in \mathbb{R}$ mit $\int t_k d\vec{x} \leq A$

Bild 82

Dann ex. $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge.

Definition: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{L}_1 -intbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $t_k \in T^{(n)}$ mit $t_k \leq t_{k+1} \forall k$, $\int t_k dx \leq A$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k(\vec{x}) = f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Man setzt dann

$$\int f(\vec{x}) d\vec{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} \int t_k(\vec{x}) d\vec{x}$$

(kann zeigen: Definition ist unabhängig von der Wahl der t_k)

Beispiel: konstruiere f , welches \mathcal{L}_1 -intbar, aber nicht regel-intbar.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bild 83

$$t_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = \frac{a}{q} \text{ mit } q \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad t_k \leq t_{k+1}$$

$\int t_k dx = 0$. Also $\int f dx = 0$

f ist *keine* Regelfunktion, weil jedes Intervall rat. und irrat. Zahlen enthält.

Vorsicht: $-f$ ist nicht \mathcal{L}_1 -intbar.

Definition: Eine Funktion f heißt Lebesgue-intbar, wenn $f = g - h$ mit \mathcal{L}_1 -intbar: g, h ; und es sei $\int f d\vec{x} = \int g d\vec{x} - \int h d\vec{x}$

Dies ist sinnvolle Definition: ist

$f = g - h = g_1 - h_1$ mit \mathcal{L}_1 -Funktion, g, g_1, h, h_1 , dann ist

$$g + h_1 = g_1 + h$$

und nach Definition

$$\begin{aligned} \int (g + h_1) d\vec{x} &= \int g + \int h_1 \\ &= \int g_1 + \int h, \text{ also} \\ \int g - \int h &= \int g_1 - \int h_1 \end{aligned}$$

”uneigentliche Integration” ist in (fast) allen Fällen ”eingebaut”

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ macht Sinn als uneigentl. Integral;

aber $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x > 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist \mathcal{L}_1 -intbar und $\int f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

Bild 84

Die entscheidenden Sätze:

SATZ 2 (von der monotonen Konvergenz).

Seien f_k L-intbarte Funktionen mit $f_k(\vec{x}) \leq f_{k+1}(\vec{x}) \forall k \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gebe ein A mit $\int f_k d\vec{x} \leq A$ für alle k . Dann ist $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x})$ ex. für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge;

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) & \text{wenn der Grenzwert ex.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist L-intbar, und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(\vec{x}) d\vec{x} = \int f(\vec{x}) d\vec{x}$

SATZ 3. Ist f L-intbar, dann auch $|f|$.

Warnung: ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ und uneigentlich Regel-intbar,

$$\text{dann setze } f_k(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & (\|\vec{x}\|_\infty \leq k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $f_k \nearrow$, $\lim f_k(\vec{x}) = f(\vec{x})$, also

$$\int f d\vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\|\vec{x}\| \leq k} f_k d\vec{x}$$

also stimmen L-Integral und uneigentl. Integral überein.

ABER: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ ex. als uneigentl. Regelintegral

Bild 72

aber $|\frac{\sin x}{x}|$ ist *nicht* L-intbar.

SATZ 4 (Lebesgue'scher Konvergenzsatz). Seien f_k L-intbarte Funktion; es gebe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ L-intbar; $|f_k(\vec{x})| \leq F(\vec{x})$.

Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x})$ existiere für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge. Dann ist auch

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) & \text{wenn der Grenzwert existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

L-intbar, und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\vec{x} = \int f d\vec{x}$

Übung: Satz 2 \Rightarrow Satz 4 \Rightarrow Satz 2

SATZ 5. Ist f regel-intbar, dann auch L-intbar, und Regel- und Lebesgue-Integral stimmen überein.

SATZ 6. (Fubini-Tonelli).

(a) ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ L-intbar, dann

$$(*) \int f d\vec{x} = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

(b) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ und ex. die rechte Seite in (a), dann ist f L-intbar, und es gilt (*)

$L^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ L-intbar}\}$.

$G \subset \mathbb{R}^n$; $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, setze fort mit $f(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \notin G$

$L^1(G)$ sei die Menge aller dieser mit $f \in L^1(\mathbb{R})$

$\int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int f d\vec{x}$ (rechts mit der 0-Fortsetzung)

Lebesguescher Konvergenzsatz: $f_k \in L^1(\mathbb{R})$; $F \in L^1(\mathbb{R})$. Es gelte $|f_k(\vec{x})| \leq F(\vec{x}) \forall k, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Die Menge $\{\vec{x} : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) \text{ ex. nicht}\}$ sei eine Nullmenge. Dann ist die durch

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) & \text{wenn Grenzw. ex.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

def. Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$, und es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(\vec{x}) d\vec{x} = \int f(\vec{x}) d\vec{x}$

Parameter-Integrale: $f(\vec{x}, \vec{y})$; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in G \subset \mathbb{R}^l$

$$g(\vec{y}) = \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}, \text{ wenn } \forall \vec{y} \in G \text{ die Funktion } \vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

SATZ 7. gegeben seien $G \subset \mathbb{R}^l$ offen und $f : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\forall \vec{y} \in G$ sei $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- (ii) in $\vec{y}_0 \in G$ sei für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ die Abb. $\vec{y} \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ stetig.
- (iii) es gebe $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $|f(\vec{x}, \vec{y})| \leq F(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \vec{y} \in G$.

Dann ist $g(\vec{y}) = \int f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$ in \vec{y}_0 stetig.

Zeige: für jede Folge $\vec{y}_k \rightarrow \vec{y}_0$ ist $g(\vec{y}_k) \rightarrow g(\vec{y}_0)$

$f_k(\vec{x}) := f(\vec{x}, \vec{y}_k)$; $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{y}_0) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, nach LKS

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(\vec{y}_k) = \lim \int f_k(\vec{x}) d\vec{x} = \int f(\vec{x}, \vec{y}_0) d\vec{x} = g(\vec{y}_0)$$

SATZ 8. Sei $G \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften:

- (i) $\forall y \in G$ ist $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- (ii) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $y \mapsto f(\vec{x}, y)$ nach y diffbar

(iii) für alle $\vec{y} \in G$ ist $\vec{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(iv) Es gebe $F \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $|\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, y)| \leq F(\vec{x}) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \forall y \in G$.

Dann ist $g(y) = \int f(\vec{x}, y) d\vec{x}$ diffbar auf G und $g'(y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, y) d\vec{x}$

Beweis: $\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0} \int (f(\vec{x}, y) - f(\vec{x}, y_0)) d\vec{x} = \int \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, \eta) d\vec{x}$ für ein η zwischen y, y_0 .
Jetzt $y_k \rightarrow y_0$, dann auch $\eta \rightarrow y_0$, also fertig nach Satz 7.

Ein erstes Beispiel: für $y > 0$ betrachte

$$\begin{aligned} W(y) &:= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y^2} \quad (\text{ex. als uneigentl. Regelint. und als L-Integral}) \\ &= \frac{1}{y^2} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{1}{y^2} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \stackrel{\frac{x}{y}=t}{=} \frac{1}{y} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{N}{y}} \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{y} \lim_{N \rightarrow \infty} \arctan t \Big|_0^{\frac{N}{y}} = \frac{\pi}{2y} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Wende Satz 8 an auf $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$
 $0 < a \leq y \leq b < \infty$. Wähle $F(x) = \frac{2b}{(x^2 + a^2)^2}$. Nach Satz 8 ist W diffbar auf $[a, b]$ mit

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3}{y^4} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx = -2 \int_0^\infty \frac{2y}{(x^2 + y^2)^3} dx \\ \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^3} &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{y^5} \end{aligned}$$

Induktion:

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \frac{1}{y^{2n-1}}}. \text{ Wähle } y = \sqrt{n} \text{ für alle } y > 0$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \frac{\sqrt{n}}{n^n} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + n)^n}$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \sqrt{n} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$$

Für $t \geq 0$ ist $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \nearrow e^t$. Monotoner Konvergenzatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 7} \dots \frac{(2n-2)^2}{(2n-3)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \right) \left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \right) \dots \frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \frac{2n-1}{1}$$

SATZ 9. $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \right) \left(\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \right) \left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \right) \dots \frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}$
(John Wallis, 168x)

6.7 Klassische Parameterintegrale

(a) Gammafunktion. Für $s > 0$ sei

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

(für $0 < s < 1$ ist dies ein uneigentl. Integral bei 0, für alle s bei ∞).

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^N = 1; (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\boxed{\Gamma(s+1)} = \int_0^{\infty} t^s e^{-t} dt = -t^s e^{-t} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \boxed{s\Gamma(s)}$$

SATZ 1. Für $s > 0$ existiert das Integral $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$, es gilt $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$ mit $\Gamma(1) = 0! = 1$

Verhalten bei 0: $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ ($s > 0$); in etwa wie $\frac{1}{s}$

Nach Paragraph 6, Satz 8 ist Γ diffbar, $\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} (\log t) t^{s-1} e^{-t} dt$

$$\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} (\log t)^2 t^{s-1} e^{-t} dt > 0$$

Bild 85

Die Gammafunktion

Ziel: eine möglichst "glatte" und "natürliche" Verallgemeinerung von $n! = n(n-1)!$ für reelle, positive n .

Euler schlägt dafür vor:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (*)$$

Für $s > 0$ existiert dieses Integral und stellt nach dem Satz über Differenzieren von Parameter-Lebesgue-Integralen eine ∞ oft diffb. Funktion dar mit

$$\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} (\log t) t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma''(s) = \int_0^{\infty} (\log t)^2 t^{s-1} e^{-t} dt$$

SATZ 1. Durch (*) ist auf $s > 1$ eine ∞ oft diffb. Funktion definiert. Es gilt $\Gamma(1) = 1$ und $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$.

"historischer Irrtum" $\Gamma(n) = (n-1)!$

"Reparaturversuche" Gauß ≈ 1810 , Lösche ≈ 1960

$$\Gamma(s+1) = \Pi(s) = s!$$

Aus den Formeln lies ab: $\Gamma(s) > 0$, $\Gamma''(s) > 0$ für alle $s > 0$. Der Graph ist also "linksgekrümmt" ($\hat{=}$ konvex) mit $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Für $s \searrow 0$ ist wegen $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ ungefähr $\Gamma(s)$ wie $\frac{1}{s}$, insbesondere also fallend. Da $\Gamma''(s) > 0 \forall s > 0$ zeigt dass $\Gamma'(s)$ monoton wächst, muss der Graf etwa so aussehen:

Bild von Folie

Insbesondere ist das Minimum wegen $\Gamma(1) = \Gamma(2)$ zwischen 1 und 2 gelegen.

Andere Darstellungen: $\Gamma(s)$ verkleidet sich gern. Mit $t = u^2$ und Substitution $dt = 2u du$ ist

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{\infty} u^{2s-1} e^{-u^2} du$$

Insbesondere ist

...

Ist $\Gamma(s)$ die "richtige" Interpolation von $n!$?

Ja, es geht gar nicht anders.

Definition: $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ heißt **logarithmisch konvex**, wenn $\log f$ konvex ist.

Beispiel: $\exp x$ ist logarithmisch konvex, aber *gerade so*.

Anschauung: "Graf hängt sehr stark durch"

SATZ 2. Auf $(0, \infty)$ ist $\Gamma(s)$ logarithmisch konvex.

Beweis: konvex \Leftrightarrow (2. Ableitung ≥ 0)

Prüfe also: $0 \leq (\log \Gamma)'' = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)' = \frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$

...

SATZ 3 (Eindeutigkeitssatz von Bohr und Mollerup).

Die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei logarithmisch konvex, es gilt $sf(s) = f(s+1)$ für alle s und $f(1) = 1$. Dann ist $f = \Gamma$.

Anschaulich: mit "starker Linkskrümmung" lassen sich die Fakultäten $n!$ *nur* durch $\Gamma(s+1)$ interpolieren.

...

SATZ 4 (Euler 1171)

...

Start: nach Tonelli ist

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^\infty t_1^{x-1} e^{-t_1} dt_1\right) \left(\int_0^\infty t_2^{y-1} e^{-t_2} dt_2\right) = \int_{(0,\infty)^2} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)} d\vec{t}$$

Transformationsformel: neue Variable

$$u = t_1 + t_2; \quad v = \frac{t_1}{t_1 + t_2} = \frac{t_1}{u}$$

Dann $0 < u < \infty$, $0 < v < 1$ und

$$t_1 = uv, \quad t_2 = u - t_1 = u(1 - v),$$

...

Die Gauß'sche Produktdarstellung.

SATZ 5. Für $s > 0$ ist $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$

Bemerkung: der Grenzwert ex. für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

$s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ kann für $-1 < s < 0$ als Definition für $\Gamma(s)$ gelesen werden. usw. Dies setzt Γ auf $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ fort; Dann gilt für diese s ebenfalls Satz 5. Γ hat Pole vom Typ $\frac{1}{s+n}$ an den negativen ganzen Zahlen $-n$.

Bild 86

Beweis mit Konvergenzsätzen:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Ist für festes t $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ in n monoton wachsend?

$$\frac{d}{dn} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \frac{d}{dn} \exp\left(n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \underbrace{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}_{>0} \left(\log\left(1 - \frac{t}{n}\right) + \frac{n}{1 - \frac{t}{n}} \frac{t}{n^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(\log\left(1 - \frac{t}{n}\right) + \frac{\frac{t}{n}}{1 - \frac{t}{n}}\right) \geq 0 \text{ wenn } t < n$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & t < n \\ 0 & t \geq n \end{cases} \quad (\nearrow \text{ für alle festen } t \text{ (in } n))$$

Monotone Konvergenz:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} t^{s-1} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} t^{s-1} f_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{s-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad \frac{t}{n} = \tau \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n\tau)^{s-1} (1 - \tau)^n n d\tau \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1 - \tau)^{(n+1)-1} d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(s, n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^s \frac{\Gamma(s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n! \Gamma(s)}{\Gamma(s+n+1)} \end{aligned}$$

mit $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$

$$\rightarrow \Gamma(s+n+1) = (s+n)\Gamma(s+n) = (s+n)(s+n-1)\Gamma(s+n-1) = (s+n)\dots(s+1)s\Gamma(s)$$

einsetzen

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

SATZ 6 (Ergänzungssatz). Für $0 < s < 1$ gilt $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

Besser: $f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi}$; $g(s) = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}$

$$f''(s) = -\pi^2 f(s)$$

Ziel: zeige: $\boxed{g''(s) = -\pi^2 g(s)}$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

$$g(0) = 0; \quad g'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s) - g(0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = 1$$

Grundidee: $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$

$$g(s) = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(s+1)\dots(s+n)(1-s)(2-s)\dots(n+1-s)}{n^s n! n^{1-s} n!}$$

$$= s \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+s)(1-s)(2+s)(2-s)\dots(n+s)(n-s)}{n! \cdot n!} (n+1-s)$$

$$= s \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+s)(1-s)(2+s)(2-s)\dots(n+s)(n-s)}{n! \cdot n!}$$

$$= s \lim_{n \rightarrow \infty} (1+s)(1-s)(1+\frac{s}{2})(1-\frac{s}{2})\dots(1+\frac{s}{n})(1-\frac{s}{n}) = s \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 - (\frac{s}{j})^2)$$

$$\Rightarrow g(s) = s \prod_{j=1}^{\infty} (1 - (\frac{s}{j})^2) = s \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=-N}^N (1 - \frac{s}{j})$$

Wenn Satz 6 bewiesen:

SATZ 7 (Sinusprodukt). $\frac{\sin \pi s}{\pi} = s \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=-N}^N (1 - \frac{s}{j})$

Beweis Satz 6: $\frac{g'(s)}{g(s)} = (\log g(s))' = \left(\log s + \sum_{j=1}^{\infty} \log(1 - (\frac{s}{j})^2) \right)'$

längere Rechnung: $g'' = -\pi^2 g$

fertig.