

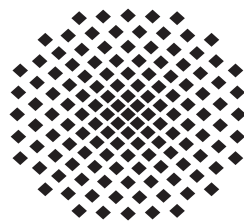
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 47
70569 Stuttgart

Mitschriften zur Vorlesung

HÖHERE MATHEMATIK III

bei Jörg Brüdern im WS 2008/09

Angefertigt von Jens Nitschke



**Universität
Stuttgart**

Inhaltsverzeichnis

7	Vektoranalysis	1
7.1	Wege und Kurven	1
7.2	Kurvenintegrale von Vektorfeldern	4
7.3	Der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene	10
7.4	Integration auf Flächen und Mannigfaltigkeiten	13
7.5	Der allgemeine Gauß'sche Integralsatz	20
7.6	Harmonische Funktionen	26
7.7	Der Satz von Stokes	34
8	Funktionentheorie	43
8.1	Komplexe Differenzierbarkeit	43
8.2	Kurvenintegrale	46
8.3	Konsequenzen der Cauchy'schen Integralformel	51
8.4	Laurent-Reihen	56
8.5	Integralauswertungen mit Residuensatz	61
9	Differentialgleichungen	67
9.1	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	67
9.2	Bessel-Differentialgleichung	71
9.3	Gewöhnliche DGL und dynamische Systeme.	74
9.4	Lineare Differentialgleichungen	77
9.5	Zum Verlauf der Integralkurven	80
9.6	Der Fluss eines Vektorfeldes	84
9.7	Einige gewöhnliche DGL und ihre Lösungen	87
9.8	Die Fourier-Transformation	89
9.9	Fourier-Reihen	100
9.10	Der Schwartz-Raum und die F-Transfo als orthogonale Abbildung	106
9.11	Laplace-Transformation	109

7 Vektoranalysis

7.1 Wege und Kurven

Eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Weg**. Gibt es eine Zerlegung $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_r = b$, so dass γ auf $[t_{j-1}, t_j]$ ($1 \leq j \leq r$) stetig diffbar ist, dann heißt γ **Integrationsweg**, aber auch stückweise stetig diffbar.

Wie lässt sich die "Länge" eines Weges messen?

$$\sum_{j=1}^r \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2;$$

dies ist Länge des Streckenzuges im Bild. Setze

$$L(\gamma) := \sup_{\text{alle Zerlegungen}} \sum_{j=1}^r \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2; \text{ heißt Länge von } \gamma$$

SATZ 1. Ist γ ein Integrationsweg, dann gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

(Idee einfach, Details zur Übung)

Beispiel (Viertelkreis):

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$$

$$\psi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\psi(t) = (\sin t, \cos t)$$

Anschaulich sollten φ, ψ dieselbe Länge haben!

Seien $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

und $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$

zwei Integrationswege. Gibt es eine diffbare, streng monotone Funktion $g : I \rightarrow J$ mit

$$\varphi = \psi \cdot g$$

dann heißen φ und ψ äquivalent.

Eine Äquivalenzklasse von Wegen heißt Kurve.

SATZ 2. Äquivalente Wege haben dieselbe Länge.

Bemerkung: wir können für jede Kurve K die Länge $L(K) := L(\gamma)$ durch *einen* Weg γ , der K beschreibt, definieren.

Beispiel:

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2;$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$L(\varphi) = 2\pi.$$

$$\psi : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$$L(\psi) = 4\pi$$

Wir sehen: Kurven haben Richtungssinn, und kennen "Häufigkeit" des Durchlaufens.

Beweis Satz 2 (Substitution):

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \int_I \|\varphi'(t)\|_2 dt = \int_I \|(\psi \circ g)'(t)\|_2 dt && \boxed{u = g(t)} \\ &= \int_I \|\psi'(g(t))g'(t)\|_2 dt = \int_I g'(t)\|\psi'(g(t))\|_2 dt \\ &= \int_J \|\psi'(u)\|_2 du \text{ nach Subst.-Regel} \\ &= L(\psi) \end{aligned}$$

Ein Int-Weg $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **nirgends konstant**, wenn $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$.

("fährt non-stop vom Anfangs- zum Endpunkt")

Für einen solchen Weg setze

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|_2 d\tau$$

(wenn $I = [a, b]$). Diese Funktion

$$s : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$$

ist streng monoton wachsend, diffbar mit $s'(t) = \|\gamma'(t)\|_2$.

s heißt **Bogenlänge**.

Benutze s^{-1} (Umkehrung) als "Zeit-Transfo":

$$\Gamma : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma = \gamma \cdot s^{-1}$$

Für jedes $0 \leq t \leq L(\gamma)$ berechne

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\Gamma'(u)\|_2 \, du && \tau = s^{-1}(u) \\ &= \int_0^t \|\gamma \cdot s^{-1}(u)\|_2 \, du && s(\tau) = u \quad du = s'(\tau) \, d\tau \\ &= \int_a^{\gamma(t)} \|\gamma(\tau)\|_2 s'(\tau) \, d\tau \\ &= t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\Gamma'(t)\|_2 = 1}$$

Γ heißt **Parametrisierung nach der Bogenlänge**; diesen Weg gibt's zu jeder Kurve.

Definition des Kurvenintegrals

Sei K eine Kurve und Γ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge.

Für stetiges $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ setze

$$\int_K f \, ds = \int_0^{L(K)} f(\Gamma(t)) \, dt$$

Sei jetzt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, der in der Äquivalenzklasse von K liegt. Sei $s(t)$ die Bogenlänge dazu. Dann

$$\begin{aligned} \int_K f \, ds &= \int_0^{L(K)} f(\Gamma(t)) \, dt \\ &= \int_0^{L(K)} f(\gamma \cdot s^{-1}(t)) \, dt && u = s^{-1}(t) \quad s(u) = t \\ &= \int_a^b f(\gamma(u)) s'(u) \, du && = \int_a^b f(\gamma(u)) \|\gamma'(u)\| \, du \end{aligned}$$

SATZ 3. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Int-Weg mit Kurve K .

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\boxed{\int_K f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 \, dt}$$

Wiederholung:

$$\int_K f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|_2 dt \quad (*)$$

wenn $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, der K beschreibt.

”Standardabschätzung”:

$$\left| \int_K f ds \right| \leq L(K) \max_{\vec{x} \in K} |f(\vec{x})|,$$

denn nach (*) ist

$$\left| \int_K f ds \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \|\gamma'(t)\|_2 dt \leq \max_{\vec{x} \in K} |f(\vec{x})| \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2 dt = \left(\max_{\vec{x} \in K} |f(\vec{x})| \right) L(K)$$

7.2 Kurvenintegrale von Vektorfeldern

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld** auf G . Kommt V ein Attribut wie ”stetig”, ”diffbar” zu, so benutze dasselbe für das Vektorfeld (Vf).

Sei Γ die Parametrisierung von K nach der Bogenlänge.

Ist V ein stetiges Vf, dann definiere

$$\int_K \langle V; d\vec{x} \rangle := \int_0^{L(K)} \langle V(\Gamma(t)); \Gamma'(t) \rangle dt$$

Dies heißt das Kurvenintegral des Vektorfeldes V über K .

Es gilt die ”Standardabschätzung”.

$$\begin{aligned} \left| \int_K \langle V; d\vec{x} \rangle \right| &\leq \int_0^{L(K)} |\langle V(\Gamma(t)); \Gamma'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_0^{L(K)} \|V(\Gamma(t))\|_2 dt \leq L(K) \max_{\vec{x} \in K} \|V(\vec{x})\|_2 \end{aligned}$$

Was passiert, wenn die Kurve *nicht* durch die Parametrisierung nach der Bogenlänge gegeben ist?

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stückweise stetig diffbar.

Dann definiere das **Wegintegral** über ein Vf V durch

$$\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle := \int_a^b \langle V(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt$$

Sei $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zu γ äquivalenter Weg, d.h. es gibt eine streng monotone, diffbare Bijektion $g : [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle &= \int_a^b \langle V(\tilde{\gamma} \cdot g(t)); (\tilde{\gamma} \cdot g)'(t) \rangle dt && (\tilde{\gamma} \cdot g)'(t) = g'(t)\tilde{\gamma}'(g(t)) \\ &= \int_a^b \langle V(\tilde{\gamma} \cdot g(t)); g'(t)\tilde{\gamma}(g(t)) \rangle dt \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \langle V(\tilde{\gamma}(u)); \tilde{\gamma}'(u) \rangle du && u = g(t) \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \langle V; d\vec{x} \rangle \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle = \int_K \langle V, d\vec{x} \rangle$, wenn γ in der Klasse von K liegt.

Beispiel: $V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1x_2 \end{pmatrix}$ soll über den gegen die Uhr orientierten Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 1$ integriert werden.

Wähle $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto (\cos t, \sin t)$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin t) dt = 0 \end{aligned} \quad \boxed{20 \text{ Beispiele rechnen}}$$

Eselsbrücken:

$V(\vec{x}) = (V_1(\vec{x}), \dots, V_n(\vec{x}))$. "Formal"

$\langle V, d\vec{x} \rangle = V_1(\vec{x}) dx_1 + \dots + V_n(\vec{x}) dx_n$. Oft wird auch $\int_{\gamma} V_1 dx_1 + \dots + V_n dx$ geschrieben.

Genauso schreibe $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. "Merkregel"

$$\begin{aligned} & \int V_1(\gamma(t)) d\gamma_1(t) + \dots + V_n(\gamma(t)) d\gamma_n(t) \quad d\gamma_j = \gamma_j' dt \\ &= \int V_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + V_n(\gamma(t))\gamma_n'(t) dt \\ &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet; $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig diffbar.

$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auch **Gradientenfeld**

SATZ 1.

Ist $V = \nabla F$ ein solches Gradientenfeld, dann gilt fuer jeden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$

$$\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Ist V ein Gradientenfeld, dann heißt F mit $\nabla F = V$ eine Stammfunktion zu V ; (Physik: $-F$ Potenzial von V)

Klar: sind F_1, F_2 zwei Stammfkt zu V , dann ist $F_1 - F_2$ konstant.

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$

Analog "geschlossene Kurve"

SATZ 2. Sei $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diffb. Vf auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$. Es gibt genau dann eine Stammfkt zu V , wenn für *jeden* geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ gilt $\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle = 0$.

Eine Rechnung simpel: gibt es ein solches F , dann liefert Satz 1, dass $\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle = 0$ ist.

$F(\vec{x}) := \int_{\gamma_{\vec{x}}} \langle V, d\vec{x} \rangle$; Def. einsetzen, Kettenregel, $\nabla F = V$ (4 Zeilen)

Beobachtung: ist $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar, dann gilt stets $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} F$ (*)

Ist $V = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = (V_1, \dots, V_n)$, dann gilt also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V_j = \frac{\partial}{\partial x_j} V_i$$

SATZ 3. Ist $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diffb. Vf mit Stammfunktion, dann gilt die "Integrabilitätsbedingung"

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Wiederholung: $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet; $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Vf.

Die Kurve K in G sei gegeben durch einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$. Dann ist

$$\int_K \langle V; d\vec{x} \rangle = \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

”Arbeitsintegral”.

Sei $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann ist $V = \nabla F$ ein stetiges Vf; ”Gradientenfeld von F ”.

Umgekehrt heißt F **Stammfunktion** des Vf V . Physik: $-F$ heißt Potenzial zu V .

SATZ 1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Gradientenfeld einer stetig diffb. Fkt $F : G \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ stückw. stetig diffb. Weg. Dann gilt

$$\int_\gamma \langle V, d\vec{x} \rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

denn:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle V, d\vec{x} \rangle &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt \\ \text{und } \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} (F \cdot \gamma)(t) = \nabla F(\gamma(t)) \gamma'(t) \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

Beispiele:

(i) ”Gravitationsfeld” $G = \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

$$F(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}; \quad \nabla F = \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^3}$$

Nach Satz 1 ist für *jeden* Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

$$\int_\gamma \left\langle \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^3}, d\vec{x} \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma(\vec{b})\|_2} - \frac{1}{\|\gamma(\vec{a})\|_2}$$

(ii) ”Wirbelfeld” im \mathbb{R}^2 $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

$$x = \cos t; \quad y = \sin t$$

$$\int_{x^2+y^2=1} \langle V, d\vec{x} \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi$$

Wegen Satz 1 kann das Wirbelfeld kein Potenzial haben, da dieses (bei geschlossenem Weg) sonst 0 wäre.

Wie lässt sich erkennen, ob es eine Stammfunktion gibt?

Ist $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffb., dann gilt

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j},$$

wenn $\nabla F = V = (V_1, \dots, V_n)$ ist. Die Bedingung für ein diffb. Vektorfeld V :

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_i} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (*)$$

heißt Integrabilitätsbedingung.

SATZ 3. Ist V ein Gradientenfeld, dann gilt die Integrabilitätsbedingung.

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es ein $\vec{s} \in G$ gibt, so dass zu *jedem* $\vec{x} \in G$ die Strecke von \vec{s} nach \vec{x} in G verläuft. \vec{s} heißt **Sternpunkt**.

Ist jedes $\vec{s} \in G$ ein Sternpunkt, dann heißt G **konvex**.

SATZ 4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein stetig diffb. Vf, welches der Integrabilitätsbedingung genügt. Dann hat V eine Stammfunktion.

Satz 4 bleibt auch für allgemeinere Gebiete richtig, aber *nicht* für alle.

$U = G_1 \cup G_2$ "Hufeisen". Wir zeigen, dass Satz 4 für U richtig bleibt. G_1, G_2 sternförmig: Das Vf V erfülle Integrabilitätsbedingung, hat also Stammfunktion F_j auf G_j ; dann sind F_1, F_2 Stammfunktionen zu V auf der konvexen Menge $G_1, G_2 \Rightarrow F_1 - F_2$ konstant.

Modifiziere: F_2 zu $F_2 - c$, c konstant, so dass $F_1 - F_2 = 0$ wird auf $G_1 \cap G_2$; dann bauen sich F_1, F_2 zu einer Stammfunktion auf U zusammen.

Lässt sich G stetig so ändern, dass eine sternförmige Menge entsteht, dann bleibt Satz 4 richtig.

Der **Beweis** liefert *eine* Möglichkeit, das Potenzial zu berechnen!

Sei $\vec{s} \in G$ Sternpunkt. Zu $\vec{x} \in G$ sei

$$\gamma_{\vec{x}} : [0, 1] \rightarrow G; t \mapsto \vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{\gamma_{\vec{x}}} \langle V, d\vec{x} \rangle \\ &= \int_0^1 \langle V(\gamma_{\vec{x}}(t)), \vec{x} - \vec{s} \rangle dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 V_j(\gamma_{\vec{x}}(t))(x_j - s_j) dt \end{aligned}$$

Ziel: durch Nachrechnen $\frac{\partial F}{\partial x_1} = V_1$ etc.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \int_0^1 V_j(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s}))(x_j - s_j) dt \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} V_j(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s}))(x_j - s_j) dt \\
 &= \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^1 (x_j - s_j) \frac{\partial}{\partial x_1} V_j(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt \\
 &= \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^1 t(x_j - s_j) \frac{\partial V_j}{\partial x_1}(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt \\
 &\stackrel{\text{Intbed}}{=} \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt + \sum_{j=1}^n (x_j - s_j) \int_0^1 t \frac{\partial V_1}{\partial x_j}(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt \\
 &= \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt \\
 &= \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt + t V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) dt \\
 &= V_1(\vec{x})
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} V_1(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_1}{\partial x_j}(\vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s}))(x_j - s_j)$$

Bestimmung von Stammfunktionen:

2 Möglichkeiten: G Sterngebiet, $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ genüge der Int-Bed. Nach Satz 4 gibt es eine Stammfunktion, ist $\vec{s} \in G$ Sternpunkt und $\vec{x} \in G$

$\gamma_{\vec{x}}$ die Strecke von \vec{s} nach \vec{x} , dann ist

$$F(\vec{x}) = \int_{\gamma_{\vec{x}}} \langle V; d\vec{x} \rangle$$

Parametrisiere:

$$\gamma_{\vec{x}} : [0, 1] \rightarrow G; t \mapsto \vec{s} + t(\vec{x} - \vec{s})$$

Berechne Integral.

Alternativ kann "Ansatz" versucht werden.

Idee am Bsp.: $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $V(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy} + 2y \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial y} ye^{xy} = e^{xy} + yxe^{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (xe^{xy} + 2y)$$

\Rightarrow Int-Bed. erfüllt; \mathbb{R}^2 sternförmig.

\Rightarrow es gibt Stammfunktion F ; $\frac{\partial}{\partial x} F = ye^{xy} \Rightarrow F(x, y) = e^{xy} + c(y)$

$\Rightarrow xe^{xy} + 2y = \frac{\partial}{\partial y} F = xe^{xy} + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 2y, c(y) = y^2$

Dies findet $F(x, y) = e^{xy} + y^2$ als Stammfunktion.

Im Prinzip lässt sich so stets eine Stammfunktion finden, aber in höherer Dimension immer mühsamer.

Bestimmung von einer Stammfunktion:

Diagramm einfügen

Beispiel dazu: $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $V(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

V erfüllt die Int-Bed., aber G ist *nicht* sternförmig.

$\tilde{G} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$

\tilde{G} ist sternförmig.

Dort existiert Stammfunktion.

Übung: mit Wegintegral Stammfunktion berechnen.

Aber: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$; $\int_{\gamma} \langle V, d\vec{x} \rangle = 2\pi$, d.h. auf G kann es keine Stammfunktion geben.

7.3 Der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene

Ein Integrationsweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$. Ein solcher heißt einfach, wenn $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv.

Jordan'scher Kurvensatz: ein solcher Weg zerlegt die Ebene in zwei zusammenhängende Teile; einen beschränkten ("das Innere") und einen unbeschränkten ("das Äußere").

Wir wählen die Orientierung der Randkurve des Inneren so, dass "in Fahrtrichtung" das Innere links liegt; "positive Orientierung"

Ist G das Innere einer einfach geschlossenen Kurve mit positiver Orientierung, dann ist G offen und beschränkt, der Rand ∂G ist Bild der Kurve; wir schreiben jetzt oft ∂G auch für die positiv orientierte Randkurve.

SATZ 1. Sei G wie oben mit Randkurve ∂G . Auf $G \cup \partial G$ seien f, g definierte und stetig diffb. Funktionen.

Dann gilt

$$\int_{\partial G} f dy - g dx = \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) d(x, y)$$

linke Seite: Kurvenintegral des Vf $(-g(x, y), f(x, y))$

Wähle in Satz 1 $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$. Dann folgt:

SATZ 2. (Flächenberechnung aus Randkurve).

Ist G wie oben, dann

$$\int_G d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx$$

(klar: links steht der Inhalt von G)

Satz 1 ist eine Version des Hauptsatzes der Diff- und Int-Rechnung.

Satz 1 heißt "Gauß'scher Int-Satz";

Allgemeiner versteht man unter einem "Gauß'schen Satz" eine Formel, die $\int_G F(\vec{x}) d\vec{x}$ in ein Integral $\int_{\partial G} \langle V, d\vec{x} \rangle$ überführt.

Beweis von Satz 1

1. Spezialfall: $f \equiv 0$;

G "Standardmenge"; d.h. es gibt ein Intervall $[a, b]$ und stetig diffb. Fkt. $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G = \{(x, y) : a < x < b; \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

Bemerkung: das Innere eines einfach geschlossenen Int-Weges kann immer in endliche viele Standardmengen zerlegt werden.

Gilt Satz 1 für Standardmengen, dann auch *immer*. Vertauschen der Rollen von $x \leftrightarrow y$; Satz 1 auch für $g \equiv 0$, also für *alle*.

Wiederholung:

SATZ 1. Sei $G \in \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückw. stetig diffbarer, einfacher Randkurve ∂G mit positiver Orientierung.

Seien $f, g : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_{\partial G} f dy - g dx = \int_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

Es reicht, Satz 1 für $f \equiv 0$ und "Normalgebiete" G zu zeigen:

d.h. es gibt $a < b$ reell, $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar,

$$G = \{(x, y) : a < x < b; \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\partial g}{\partial y} d(x, y) &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b (g(x, \psi(x)) - g(x, \varphi(x))) dx - \int_{\partial G} g dx \\ &= - \int_a^b g(t, \varphi(t)) dt + \int_a^b g(t, \psi(t)) dt \end{aligned}$$

denn auf den senkrechten Teilen ist das Kurvenintegral 0, weil " $dx = 0$ ",

d.h. $t \mapsto (b, t)$ $\varphi(b) \leq t \leq \psi(b)$ hat Ableitung $(0, 1)$.

$$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, \varphi(t))$$

Andere Formulierung des Gauß'schen Satzes:

Sei G wie in Satz 1; $\Gamma : [0, L] \rightarrow \partial G$ sei die Parametrisierung nach der Bogenlänge. Dann ist

$\Gamma'(s) = (\Gamma_1'(s), \Gamma_2'(s))$ tangential an ∂G in $\Gamma(s)$ und hat Länge 1.

$\vec{n}(s) = (\Gamma_2'(s), -\Gamma_1'(s))$ steht auf der Tangente und wieder Länge 1.

Sei V ein Vektorfeld auf $G \cup \partial G$; V_1, V_2 .

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle ds &= \int_0^L \langle V(\Gamma(s)), \begin{pmatrix} \Gamma_2'(s) \\ -\Gamma_1'(s) \end{pmatrix} \rangle ds \\ &= \int_0^L V_1(\Gamma(s))\Gamma_2'(s) - V_2(\Gamma(s))\Gamma_1'(s) ds = \int_{\partial G} V_1 dy - V_2 dx \end{aligned}$$

SATZ 2. (klassischer Gauß'scher Integralsatz). Sei G wie in Satz 1 und in jedem Punkt des Randes bezeichne \vec{n} die "äußere Normale" aus der obigen Konstruktion. Dann ist für jedes stetig diffbare Vf V auf $G \cup \partial G$

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle ds = \int_G \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Def.: ist $V = (V_1, \dots, V_N)$ ein Vf auf einem Gebiet des \mathbb{R}^n , dann heißt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_j} =: \operatorname{div} V \quad \text{Divergenz von } V$$

Deshalb wird Satz 2 oft auch

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle ds = \int_G \operatorname{div} V d\vec{x} \text{ geschrieben.}$$

Interpretation:

Programm:

- (1) Oberfläche im \mathbb{R}^3
- (2) Oberfläche im \mathbb{R}^n
- (3) Gauß'scher Satz im \mathbb{R}^4
- (4) Satz von Stokes Zusammenhang zwischen Flächen- und Kurvenintegration im \mathbb{R}^3

7.4 Integration auf Flächen und Mannigfaltigkeiten

Aufgabe 1: beschreibe die Mengen, die wir "Flächen" ansehen wollen.

Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet; $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig diffbar und γ' habe in jedem Punkt von U den Rang d . Dann heißt γ eine reguläre d -dimensionale Fläche im \mathbb{R}^n . (notwendig $d \leq n$). Im Allgemeinen betrachte nur den Fall $d < n$.

Fall $d = 1$: 1-dim. reguläre Fläche ist non-stop-Weg.

Fall $n = 3, d = 2$:

Eine reguläre Fläche hat in jedem Punkt $\gamma(\vec{u})$, $\vec{u} \in U$ eine d -dim. Tangentialebene, beschrieben durch $\frac{\partial \gamma}{\partial u_j}$ ($1 \leq j \leq d$)

Def.: seien $\gamma_1, \gamma_2 : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre d -dimensionale Flächen, beide injektiv und mit demselben Bild. Gilt dann, dass

$$\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

in jedem Punkte von U_1 Funktionaldet. > 0 hat, dann heißen die Flächen äquivalent. Eine Äquivalenzklasse von regulären Flächen heißt d -dim. Flächenstück.

Beispiel:

- (1) Kugeloberfläche im \mathbb{R}^3

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$\gamma : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

γ macht die $K \setminus \{\text{Meridian zu } u = 0\}$ zu einer regulären 2-dim. Fläche.

(2) $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig diffbar.

Der Graph $G_f = \{(u_1, \dots, u_d, f(\vec{u})) : \vec{u} \in U\}$

ist eine d -dim. reguläre Fläche im \mathbb{R}^{d+1}

Insbesondere ist $K_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ eine 2-dim. reguläre Fläche, denn

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 < 1)$$

macht K_+ zu einem Graphen über offener Kreisscheibe

Ist allgemeiner über einer offenen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine stetig diffb. Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann kann auf

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{x}) = 0\}$$

der Satz über implizite Funktionen angewendet werden. Dadurch kann *eine* Koordinate als Funktion der anderen dargestellt werden, d.h. diese Menge besteht (meist) aus endlich vielen Flächenstücken.

(Kugel: Nord- und Südhalbkugel)

Schritt 2: Interiere über 2-dim. Flächen im \mathbb{R}^3

Die Parallelogrammfläche in $\gamma(\vec{p})$ ist zu berechnen aus $\frac{\partial \gamma}{\partial u_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial u_2}$

Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet, $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : \gamma(U) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Integral von f über die Fläche γ , in Zeichen $\int_{\gamma} f \, do$, definiert durch

$$\int_{\gamma} f \, do := \int_U f(\gamma(\vec{u})) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\|_2 \, du_1 \, du_2$$

SATZ 1. Seien $\gamma_j : U_j \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ äquivalente reguläre Flächen.

Dann gilt für jede stetige Funktion $f : \gamma_1(U_1) \rightarrow \mathbb{R}$, die int-bar ist, dass f auch über $\gamma_2(U_2)$ int-bar ist, und

$$\int_{\gamma_1} f \, do = \int_{\gamma_2} f \, do$$

Ist Γ die Äquivalenzklasse von der Fläche γ_1 (oder γ_2), darf deshalb

$$\int_{\Gamma} f \, do = \int_{\gamma_1} f \, do$$

def. werden.

Sinn: wir können von Integralen über " $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ " sprechen, ohne die "Fläche" als "Parametrisierung" γ anzugeben. (Bew. später)

Beispiele:

(1) Integration über Kugeloberfläche $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

1. Idee: 3-dim. Polarkoordinaten:

$$\gamma(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}; \quad \gamma : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Gegeben sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$\begin{aligned} \int_K f \, do &= \int_{\gamma} f \, do = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right\|_2 \, dv \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \cos v \, dv \, du \end{aligned}$$

Mit $f = 1$ ergibt sich Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} &= \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} &= \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin^2 u \sin v \cos v + \cos^2 u \cos v \sin v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \right\|_2^2 = \cos^2 u \cos^4 v + \sin^2 u \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v = \cos^4 v + \sin^2 v \cos^2 v = \cos^2 v$$

Wiederholung:

Für ein Flächenstück F , parametrisiert durch die reguläre Fläche $\gamma : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, und eine (mindestens) auf F stetige Funktion f ist definiert

$$\int_F f \, do := \int_{\gamma} f \, do = \int_U f(\gamma(\vec{u})) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\| \, d\vec{u}$$

Beispiel: Kugeloberfläche $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ mit

$$\gamma : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

hat $\|\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}\|_2 = \cos v$

$$\Rightarrow \int_K f \, dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \cos v \, dv \, du$$

Unter der **Oberfläche** von F verstehe $\int_F dv$. Dann gilt für die **Kugeloberfläche**

$$\int_K dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \, du = 2\pi \dots$$

Beispiel 2: durch **Graphen** gegebenen Flächen:

$U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann ist der Graph

$$\Gamma = \{(u, v, h(u, v)) : (u, v) \in U\}$$

ein Flächenstück, parametrisiert durch die reguläre Fläche

$$\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^3; (u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$$

$$\text{Dann ist } \frac{\partial \gamma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial h}{\partial u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \\ -\frac{\partial h}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix},$$

...

Kugel-Fubini: $K_R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ Vollkugel, Radius R

$$K_r = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1^2\} \quad K_R = \bigcup_{0 \leq r \leq R} K_r$$

$$\int_{K_R} f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \int_0^R \left(\int_{K_r} f \, do \right) dr$$

(Beweis zur Übung)

Dies geht sehr viel allgemeiner, wenn ein Gebiet des \mathbb{R}^3 als Vereinigungsmenge von disjunkten 2-dim. Flächen entsteht.

Vorsicht: der entsprechende Fubini braucht einen Beweis.

Hilfsmittel: die **Gram'sche Matrix**

Aufgabe: $d \leq n$; $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d \in \mathbb{R}^n$, lin. unabhängig.

Frage: was ist das d -dim. Volumen des "Spats"

$$S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d) = \left\{ \sum_{i=1}^d t_i \vec{v}_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Ist $d = n$, dann bilde die quadr. Matrix A mit \vec{v}_j als Spalten.

$$\Rightarrow \text{vol } S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = |\det A| = \sqrt{(\det A)^2} = \sqrt{\det({}^t A \cdot A)} = \sqrt{\det \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle_{1 \leq i, j \leq n}}$$

Ist allgemeiner $1 \leq d \leq n$, dann bilde $A = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d)$ mit **Spalten** \vec{v}_j .

Dann ist ${}^t A A = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq d}$ eine $d \times d$ -Matrix.

Heißt "Gram-Matrix" zu $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$

$$\text{SATZ 2. } \text{vol } S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d) = \sqrt{\det {}^t A A}$$

Beweis: sei H der von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d$ im \mathbb{R}^n aufgespannte d -dim. Raum.

Im H^\perp wähle ONB $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d}$, ergänze zu einer ONB von ganz \mathbb{R}^n durch eine ONB von H , bez. $\vec{w}_{n-d+1}, \dots, \vec{w}_n$.

$$\text{vol}_d S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d) = \text{vol}_n S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d}) = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d})$$

In der Basis (w_j) hat die Matrix die Gestalt

$$\Rightarrow |\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_d, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-d})| = |\det B| = \sqrt{\det {}^t B B} = \sqrt{\det \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}$$

"Vektorprodukt" im \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann definiere das "äußere Produkt"

$\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \wedge \dots \wedge \vec{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, so dass $\vec{w} \perp \vec{v}_j$ ($1 \leq j \leq n$) und $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}, \vec{w}$ ein Rechtssystem bilden, $\|\vec{w}\|_2 = \text{vol}_{n-1} S(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$

Berechnung des äußeren Produkts: bilde $M = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ als Matrix mit \vec{v}_j als Spalten. Sei M_i die Matrix, die aus M entsteht durch *Streichen* der i -ten Zeile.

$\Rightarrow M_i$ hat Format $(n-1) \times (n-1)$.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \det M_1 \\ -\det M_2 \\ \det M_3 \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} \det M_n \end{pmatrix} \text{ ist das äußere Produkt von } \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1}$$

Beweis durch langweiliges Nachrechnen

$$\int_{\gamma} f \, do = \int_U f(\gamma(\vec{u})) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\|_2 d\vec{u}$$

Sei $1 \leq d < n$, $U \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet und $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre (d -dim.) Fläche. Für jedes $\vec{u} \in U$ sei $\gamma'(\vec{u})$ die Funktionalmatrix von γ . Dann heißt

$$g(\vec{u}) = \det {}^t \gamma'(\vec{i}) \cdot \gamma'(\vec{u})$$

Riemann'sche Metrik ("Maßtensor").

Für eine Funktion auf $\gamma(U)$ definiere

$$\int_{\gamma} f \, d\vec{s} := \int_U f(\gamma(\vec{u})) \sqrt{g(\vec{u})} \, d\vec{u}$$

heißt Integral von f über die d -dim. Fläche γ .

Spezialfälle: $d = 1$: dann ist γ ein (non-stop)-Weg, $\gamma'(u)$ der Geschwindigkeitsvektor, $g(u) = {}^t \gamma'(u) \cdot \gamma'(u) = \|\gamma'(u)\|_2^2$; es wird

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_U f(\gamma(u)) \|\gamma'(u)\|_2 \, du;$$

dies ist das schon bekannte Wegintegral.

Genauso: $d = 2$, $n = 3$. $g(\vec{u}) = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\|_2^2$, d.h. es ergibt sich

$$\int_{\gamma} f \, d\vec{s} = \int_{\gamma} f \, do \leftarrow \text{"unser Oberflächenintegral"}$$

Wiederholung:

$$\gamma : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (d \leq n)$$

$$g(\vec{u}) := \det {}^t \gamma' \cdot \gamma'(\vec{u})$$

Für jede stg f auf dem Bild von γ sei

$$\boxed{\int_{\gamma} f \, d\vec{s} := \int_U f(\gamma(\vec{u})) \sqrt{g(\vec{u})} \, d\vec{u}}$$

Wichtiger Spezialfall: $d = n - 1$.

$$\Rightarrow g(\vec{u}) = \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}} \right\|_2^2$$

Beispiel: Integration über Graphen: $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, Gebiet;

$h : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar. $\Gamma(h) = \{(u_1, \dots, u_{n-1}, h(\vec{u})) : \vec{u} \in U\}$ ist Graph von h und reguläre $n-1$ -Fläche im \mathbb{R}^n durch $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\vec{u} \mapsto (\vec{u}, h(\vec{u}))$. Bilde die Matrix

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial u_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial u_1} & \frac{\partial h}{\partial u_2} & & \frac{\partial h}{\partial u_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_{n-1}} = \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}, -\frac{\partial h}{\partial u_2}, \dots, \pm \frac{\partial h}{\partial u_{n-1}}, \mp 1 \right)$$

$$g(\vec{u}) = 1 + \|\nabla h\|^2$$

Merke: bei der Parametrisierung des Graphen entsteht im n -ten Eintrag des äußeren Produkts ± 1 .

Ist γ die Parametrisierung von $\Gamma(h)$, dann gilt

$$\boxed{\int_{\gamma} f d\vec{s} = \int_U f(\vec{u}, h(\vec{u})) \sqrt{1 + \|\nabla h\|_2^2} d\vec{u}} \quad \text{”Integration: über Graphen”}$$

SATZ 3. Seien $\gamma_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei äquivalente reguläre Flächen.

Dann gilt für jede über γ_1 integrierbare Funktion f

$$\int_{\gamma_1} f d\vec{s} = \int_{\gamma_2} f d\vec{s};$$

insbesondere ist f dann auch über γ_2 intbar.

$$\int_{\gamma_1} f d\vec{s} = \int_{U_1} f \circ \gamma_1(\vec{u}) \sqrt{\det {}^t \gamma_1' \circ \gamma_1'(\vec{u})} d\vec{u}$$

Weil es auf die konkrete Parametrisierung *nicht* ankommt, kann jetzt für d -dim. Flächenstücke $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mit *einer* regulären Fläche $\gamma : U \rightarrow \Gamma$ das Integral

$$\int_{\Gamma} f d\vec{s} := \int_{\gamma} f d\vec{s}$$

Beispiel:

$$\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(x, y, z) do = \int_{\gamma} f do$$

$$\text{mit } \gamma : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \cos u_1 \cos u_2 \\ \sin u_2 \cos u_2 \\ \sin u_2 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition kann jetzt auch über d -dim. Mannigfaltigkeiten integriert werden.

7.5 Der allgemeine Gauß'sche Integralsatz

Ist V ein VF auf $G \cup \partial G$ und dort stetig diffbar, dann gilt

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle ds = \int_G \operatorname{div} V d\vec{x}$$

Dabei ist für n -dim. VF $V = (V_1, \dots, V_n)$ die **Divergenz** def. durch

$$\operatorname{div} V = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$$

Wie muss "einfache, stückweise stetig diffbare Randkurve" vom \mathbb{R}^2 auf \mathbb{R}^n verallgemeinert werden?

Definition: Ein stückweise stetig diffb. Polyeder im \mathbb{R}^n ist eine kompakte Menge G , deren Rand aus endlich vielen regulären $n - 1$ -dim. Flächen besteht, die an $n - 2$ -dim. Flächen "verklebt" sind; auf den Randflächen existiere eine "nach außen" zeigende Normale auf der Tangentialebene.

In jedem Punkt von ∂G , wo dieser Rand diffbar ist, sei \vec{n} der nach außen zeigende Einheitsvektor. (Kugel, Polyeder, Torus, Zylinder)

Gauß'scher Integralsatz: Sei G ein stückweise stetig diffbares Polyeder im \mathbb{R}^n und \vec{n} der äußere Einheitsvektor auf dem Rand ∂G . Dann gilt für jedes stetig diffbares Vf $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_G \operatorname{div} V d\vec{x}$$

Hinweis: ist der Rand ∂G durch Parametrisierungen ($\hat{=}$ reg. Flächen) gegeben, ergibt sich \vec{n} durch Normierung des äußeren Produkts der Spalten der Funktionalmatrix dieser Parametrisierung.

2 Beispiele: $V(\vec{x}) = \vec{x} : \operatorname{div} V = n$

Gauß: $n \operatorname{vol} G = \int_{\partial G} \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle d\vec{s}$

Spezialfall: $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$

$$\boxed{n \operatorname{vol} K_n} = \int_{\partial K_n} \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial K_n} d\vec{s} \quad \boxed{= \operatorname{Oberfl.}(K_n)}$$

Sei $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Quadern, die auf den Punkt \vec{a} schrumpft.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} Q_j} \int_{Q_j} \operatorname{div} V d\vec{x} = \operatorname{div} V(\vec{a}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} Q_j} \int_{\partial Q_j} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s}$$

Wiederholung Gauß'scher Integralsatz: G stückweise stetig diffb. reguläres Polyeder.
 $V : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffb. Vf.

Auf ∂G sei \vec{n} der "äußere" Normaleneinheitsvektor. Dann gilt

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_G \operatorname{div} V d\vec{x}$$

\mathbb{R}^3 : $G \in \mathbb{R}^n$ kompakt

Ein "Bruchzylinder B in n -Richtung" ist gegeben durch $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Gebiet mit stückw. stetig diffb. Rand und zwei Fkt. $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$B = \{(\vec{u}, x_n) : \vec{u} \in U, \varphi(\vec{u}) \leq x_n \leq \psi(\vec{u})\}$$

Beispiel: Kugel, gewöhnliche Zylinder, Kegel

Zerlegungssatz: jedes im Gauß'schen Satz zulässige Polyeder ist disj. Vereinigung von endlich vielen Bruchzylindern.

Der Gauß'sche Satz wird falsch, wenn V nur auf dem Inneren von G diffbar und stetig bis auf den Rand ist.

Gauß'scher Satz, Beweisidee: "richtige" Verallgemeinerung des Hauptsatzes

$$V = (V_1(\vec{x}), \dots, V_n(\vec{x})) \quad \int_G \operatorname{div} V d\vec{x} = \sum_{j=1}^n \int_G \frac{\partial V_j}{\partial x_j} d\vec{x}$$

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \sum_{j=1}^n \int_{\partial G} V_j \vec{n}_j d\vec{s} \text{ mit } \vec{n} = (\vec{n}_1, \dots, \vec{n}_n)$$

\Rightarrow es genügt den Satz für $V = (0, \dots, 0, V_n(\vec{x}))$ zu beweisen:

$$\int_G \frac{\partial V_n}{\partial x_n} d\vec{x} = \int_{\partial G} V_n \nu d\vec{s}, \text{ wenn } \nu \text{ die } n\text{-te Komponente von } \vec{n} \text{ bezeichnet.}$$

Es genügt Bruchzylinder G in n -Richtung zu betrachten!

Beweis des Gauß'schen Satzes für Bruchzylinder durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\partial V_n}{\partial x_n} d\vec{x} & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_U \int_{\varphi(\vec{u})}^{\psi(\vec{u})} \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(\vec{u}, x_n) dx_n d\vec{u} \\ & \stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \int_U \left(\begin{array}{c} V_n(\vec{u}, \psi(\vec{u})) \\ \text{Integral über "Deckel"} \end{array} - \begin{array}{c} V_n(\vec{u}, \varphi(\vec{u})) \\ \text{über "Boden"} \end{array} \right) d\vec{u} \end{aligned}$$

$$\int_{\partial G} V_n \nu d\vec{s} = I^{(o)} + I^{(u)} + I^{(M)}$$

$$\text{mit } I^{(o)} = \int_{\Gamma(\psi)} V_n \nu d\vec{s}; \quad I^{(u)} = \int_{\Gamma(\varphi)} V_n \nu d\vec{s}; \quad I^{(M)} = \int_{\text{Zylindermantel}} \dots d\vec{s}$$

Auf Zylindermantel ist $\nu = 0$, also $I^{(M)} = 0$.

$$\text{Aber: } \int_{\Gamma(\psi)} V_n \nu d\vec{s} \stackrel{\text{Int. über Graphen}}{=} \int_U V_n(\vec{u}, \psi(\vec{u})) \nu(\vec{u}, \psi(\vec{u})) \sqrt{1 + \|\nabla \psi\|_2^2} d\vec{u}$$

$$\frac{\partial \gamma_\psi}{\partial u_1} \times \dots \times \frac{\partial \gamma_\psi}{\partial u_{n-1}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial u_2}, \dots, \pm \frac{\partial \psi}{\partial u_{n-1}}, \mp 1 \right)$$

$$\gamma_\psi : i \mapsto (\vec{u}, \psi(\vec{u}))$$

$$\vec{n} = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial u_1}, \dots, \pm \frac{\partial \psi}{\partial u_{n-1}}, \mp 1 \right)}{\sqrt{1 + \|\nabla \psi\|_2^2}}$$

Anwendungen:

1. Gebietsindikator:

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein stückw. stetig diffb. reguläres Polyeder; $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

$$V(\vec{x}) = \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{\vec{a}\} \quad (*)$$

Übung 1: ist V durch (*) gegeben, dann gilt $\text{div } V = 0$

SATZ 1. Ist $\vec{a} \notin \partial G$, dann gilt

$$\int_{\partial G} \langle V(\vec{x}), \vec{n} \rangle d\vec{s} = \begin{cases} 0 & \vec{a} \notin G \\ \omega_n & \vec{a} \in G \end{cases}$$

$$\text{mit } \omega_n = \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1} d\vec{s}$$

← hier ist $\frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2}$ stetig diffb.

$$\text{Gauß: } \int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_G \text{div } V d\vec{x} = 0$$

$$K_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\|_2 \leq r\}$$

Auf $G \setminus K_r(\vec{a})$ ist V stetig diffbar

$$0 = \int_{G \setminus K_r(\vec{a})} \text{div } V d\vec{x} = \int_{\partial(G \setminus K_r(\vec{a}))} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} - \int_{\partial K_r(\vec{a})} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s}$$

Ist $K_r(\vec{a}) \subset G$, dann gilt also

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial K_r(\vec{a})} \left\langle \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2^n}, \vec{n} \right\rangle d\vec{s}$$

Selbe Rechnung mit $K_1(\vec{a})$ in der Rolle von G :

$$\begin{aligned} \int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} &= \int_{\partial K_1(\vec{a})} \left\langle \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2^n}, \vec{n} \right\rangle d\vec{s} \\ &= \int_{\partial K_1(\vec{a})} d\vec{s} = \omega_n \end{aligned}$$

denn auf ∂K_1 ist $\|\vec{x} - \vec{a}\|_2 = 1$ und $\vec{n} = \vec{x} - \vec{a}$, also auch $1 = \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{x} - \vec{a} \rangle = \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{n} \rangle$

2. Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

Im \mathbb{R}^3 seien an endlich vielen Punkte \vec{a}_j ($1 \leq j \leq s$) Punktladungen mit Ladung $q_j \in \mathbb{R}$ aufgebracht.

Diese erzeugen das elektrische Feld

$$E(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n q_j \frac{\vec{x} - \vec{a}_j}{\|\vec{x} - \vec{a}_j\|_2^3}$$

Dann gilt für jedes stückw. stetig diffbare Polyeder $G \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial G} \langle E, \vec{n} \rangle d\vec{s} = 4\pi \sum_{a_j \in G} g_j,$$

wenn keins der \vec{a}_j auf dem Rand liegt (folgt aus Satz 1)

3. Die Kontinuitätsgleichung:

LEMMA. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ($\hat{=}$ offen, zusammenhängend).

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jede Kugel $K_r(\vec{a}) \subset U$,

sei $\int_{K_r(\vec{a})} f(\vec{x}) d\vec{x} = 0$. Dann $f(\vec{x}) = 0$ in allen $\vec{x} \in U$.

Beweis: wäre etwa $f(\vec{x}_0) = c > 0$, dann ex. $r > 0$ mit $f(\vec{x}) > \frac{c}{2}$ auf $\vec{x} \in K_r(\vec{x}_0)$ wegen Stetigkeit

$$\int_{K_r(\vec{x}_0)} f(\vec{x}) d\vec{x} \geq \frac{c}{2} \int_{K_r(\vec{x}_0)} d\vec{x} > 0$$

Wiederholung:

Ist $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $n - 1$ -dim. reguläres Flächenstück und $\vec{n} : \gamma(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges

Normalenfeld auf der Fläche mit $\|\vec{n}\|_2 = 1$, dann heißt für jedes stg. VF $V : \gamma(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Integral

$$\int_{\gamma} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s}$$

auch **Flussintegral** von V durch die Fläche $\gamma(U)$.

Kontinuitätsgleichung: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet.

Auf G sei VF $v : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein zeitabhängiges VF: $(t, \vec{x}) \rightarrow v(t, \vec{x})$

Anschauung: Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit.

Ferner sei $\varrho : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ "Dichtebelegung"

Das Vektorfeld $V := \varrho v$ heißt Massenfluss. Massenerhaltung im Gesamtsystem

$$\Leftrightarrow \forall \text{Polyeder } G \subset \Omega \text{ ist } \boxed{\frac{d}{dt} \int_G \varrho(t, \vec{x}) d\vec{x} = - \int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s}}$$

Gauß:

Massenerhaltung

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_G \varrho(t, \vec{x}) d\vec{x} &= - \int_G \operatorname{div} V d\vec{x} \\ &= \int_G \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, \vec{x}) d\vec{x} \\ \Leftrightarrow \forall \text{Polyeder } G \text{ ist } \int_G \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} V \right) d\vec{x} &= 0 \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung: Für eine Dichtebelegung ϱ und ein VF v gilt Massenerhaltung genau dann, wenn

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \operatorname{div}(\varrho v)} \quad (\text{Dies gilt für beliebige Dimension})$$

Beispiel dazu: die Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet (Körper); $T : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei zu jedem $t \in \mathbb{R}$ die Temperatur im Punkt $\vec{x} \in \Omega$.

$$\nabla_{\vec{x}} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \text{ ("Ortsgradient")}$$

$$\varrho(t, \vec{x}) = \text{Energie} = T(\vec{x}, t)$$

$$\text{Energieerhaltung} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{Grad} T$$

$$\Delta := \operatorname{div} \operatorname{Grad} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ "Laplace-Operator"}$$

Für jedes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und 2mal stetig diffb. Funktionen $u : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \Delta_{\vec{x}} u$$

spricht man deshalb von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung.

Gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{\vec{x}} u,$$

wird von "Wellengleichung" gesprochen.

Übung: sei $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ eine ONB des \mathbb{R}^n mit $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$.

Dann gilt $\Delta = (\partial_{\vec{e}_1})^2 + \dots + (\partial_{\vec{e}_n})^2$

SATZ. Ist $\sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta$ invariant unter Bewegungen des \mathbb{R}^n , dann $\delta = \Delta$.

Green'sche Formeln: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein stückw. stetig diffb., reguläres Polyeder mit äußeren Normalenfall \vec{n} .

Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar. Dann gilt

$$(1) \int_G \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\vec{x} = \int_{\partial G} f \partial_{\vec{n}} g d\vec{s} - \int_G f \Delta g d\vec{x}$$

$$(2) \int_G (f \Delta g - g \Delta f) d\vec{x} = \int_{\partial G} (f \partial_{\vec{n}} g - g \partial_{\vec{n}} f) ds$$

(auch: partielle Integration im Raum)

Beweis von (1): $V = f \nabla g$

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_G \operatorname{div} f \nabla g d\vec{x}$$

Aber:

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial G} f \langle \nabla g, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial G} f \partial_{\vec{n}} g d\vec{s}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}$$

$$\operatorname{div} f \nabla g = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2} \right) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g$$

Beweis von (2): Vertausche in (1) $f \leftrightarrow g$ und ziehe die neue Formel von der alten ab.

Anwendung: **Energierhaltung bei der Wellengleichung**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein stückw. stetig diffb., reguläres Polyeder und $u : \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lsg. von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_{\vec{x}} u$ mit $u(t, \vec{x}) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \partial G$. Dann ist die "Energie"

$$E(t) = \int_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \|\nabla_{\vec{x}} u\|^2 \right) d\vec{x}$$

konstant.

Denn: wir zeigen $\frac{d}{dt} E = 0 \checkmark$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_G \|\nabla_{\vec{x}} u\|^2 d\vec{x} &= \int_G \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 d\vec{x} \\
 &= 2 \int_G \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} d\vec{x} = 2 \int_G \langle \nabla_{\vec{x}} u, \nabla_{\vec{x}} \frac{\partial u}{\partial t} \rangle d\vec{x} \\
 &= 2 \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial t} \partial_{\vec{n}} u d\vec{s} - 2 \int_G \frac{\partial u}{\partial t} \Delta_{\vec{x}} u d\vec{x} \quad 1. \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \text{ weil } u = 0 \text{ auf } \partial G \\
 &= -2 \int_G \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\vec{x} = - \int_G \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\vec{x} \\
 &= - \frac{d}{dt} \int_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 d\vec{x}
 \end{aligned}$$

7.6 Harmonische Funktionen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

$$\Delta f = g$$

Diese partielle DGL sucht nach VF mit Potenzial (f) und gegebener Divergenz g .

Einfachste Situation: $g = 0$

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal diffb. mit $\Delta h = 0$ auf U , dann heißt h harmonisch auf U . Diese bilden einen \mathbb{R} -VR.

Beispiele:

$n = 2$:

$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Def

$$N_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} \log \|\vec{x} - \vec{a}\|_2$$

Für $n \geq 3$:

$$N_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{-(n-2)^{-1}}{n\omega_n} \|\vec{x} - \vec{a}\|^{2-n}$$

sind auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{a}\}$ definiert, heißen Newton-Potenzial mit Pol in \vec{a} , es gilt

$$\nabla N_{\vec{a}}(\vec{x}) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|_2^n}$$

und

$$\Delta N_{\vec{a}}(\vec{x}) = 0. \quad \forall \vec{x} \neq \vec{a}$$

(diese Potentiale beschreiben Gravitation durch Punktmasse 1 in \vec{a}).

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$, kompakt.

$\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$ int-bar ("Dichtebelegung")

Gesamtmasse: $M = \int_K \varrho d\vec{x}$

$$u(\vec{x}) := \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{\|\vec{x} - \vec{y}\|_2} d\vec{y}$$

ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ definiert.

Es gilt:

(i) u ist harmonisch auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$, weil $\vec{x} \mapsto \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{y}\|_2}$ in $\vec{y} \neq \vec{x}$ in \vec{x} harmonisch ist.

(ii) $\vec{x} = r\vec{a}$ mit $\|\vec{a}\|_2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{u(\vec{x})}{\frac{M}{r}} &= \frac{u(r\vec{a})}{\frac{M}{r}} \\ &= \frac{r}{M} \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{\|r\vec{a} - \vec{y}\|_2} d\vec{y} = \frac{1}{M} \int_K \frac{\varrho(\vec{y})}{\|\vec{a} - \frac{\vec{y}}{r}\|_2} d\vec{y} \end{aligned}$$

$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r\vec{a})}{\frac{M}{r}} = 1$, d.h. für große Entfernung sind $u(\vec{x})$ und $\frac{M}{\|\vec{x}\|_2}$ "fast gleich".

$$\int_{\partial G} \langle V, \vec{n} \rangle = \int_G \operatorname{div} V d\vec{x}$$

h harmonisch, $V = \nabla h \Rightarrow \operatorname{div} V = \Delta h = 0$

SATZ 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf U .

Dann gilt für jedes stückweise stetig diffb. reguläre Polyeder $G \subset U$

$$\int_{\partial G} \partial_{\vec{n}} h d\vec{s} = 0$$

(es gilt die Umkehrung!)

SATZ 2 (Mittelwerteigenschaft; Satz vom arithmetischen Mittel).

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Sei

$K_r(\vec{a}) = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{a}\|_2 \leq r\} \subset U$. Dann gilt

$$h(\vec{a}) = \frac{\int_{\partial K_r(\vec{a})} h(\vec{x}) d\vec{s}}{\int_{\partial K_r(\vec{a})} d\vec{s}} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(\vec{a})} h(\vec{x}) d\vec{s}$$

Denn: können $\vec{a} = 0$ annehmen.

Für $t \in [0, 1]$ betrachte $h_t(\vec{x}) = h(t\vec{x})$

$$I(t) := \int_{\partial K_r(0)} h_t(\vec{x}) d\vec{s}; \quad I(0) = h(0)\omega_n r^{n-1}$$

$I'(t) = 0$ für alle $0 < t < 1$. Weil I stetig auf $[0, 1]$

$$\Rightarrow I(1) = I(0) = h(0)\omega_n r^{n-1}$$

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_{\partial K_r(\vec{0})} \frac{\partial}{\partial t} h(t\vec{x}) d\vec{s} = \int_{\partial K_r(\vec{0})} \langle \nabla h(t\vec{x}), \vec{x} \rangle d\vec{s} \\ &= \frac{r}{t} \int_{\partial K_r(\vec{a})} \langle \nabla h(t\vec{x}), \frac{\vec{x}}{r} \rangle d\vec{s} = 0 \text{ nach Satz 1.} \end{aligned}$$

$$\nabla h_t = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h(t\vec{x})), \dots \right) = t (\partial_{(1,0,\dots,0)} h(t\vec{x}), \dots) = t \nabla h(t\vec{x})$$

SATZ 3 (Maximumprinzip.) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Nimmt h auf U sein Maximum an, dann ist h konstant.

Beweis: $\vec{a} \in U$, $h(x) \leq h(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in U$.

Wiederholung:

Heute sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ so, dass der Gauß'sche Int-Satz gilt, d.h. stückweise stetig diffb. reguläres Polyeder.

$\partial\Omega$ Rand davon; \vec{n} äußere Normale; $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ bezeichne Richtungsableitung nach \vec{n} , bezogen auf \vec{x} ; oft: $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_{\vec{x}}}$

Ist $h : \Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar mit $\Delta h = 0$, dann heißt h **harmonisch** auf.

SATZ 1:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \nabla h, \vec{n} \rangle d\vec{s} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} d\vec{s} = 0$$

SATZ 2. $\vec{a} \in \Omega$, $K_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\|_2 \leq r\} \subset \Omega$.

Dann gilt für alle auf Ω harmonischen h

$$h(\vec{a}) = \frac{\int_{\partial K_r(\vec{a})} h(\vec{x}) d\vec{s}}{\int_{\partial K_r(\vec{a})} 1 d\vec{s}} = \frac{\int \varphi_0}{\omega_n r^{n-1}}$$

(gilt auch mit Integralen über $K_r(\vec{a})$ in Zähler und Nenner.)

SATZ 3 (Maximumsprinzip). Ist h harmonisch und nimmt in $\vec{a} \in \Omega$ sein Maximum an, dann ist h konstant.

(genauso für's Minimum)

Alternativ: ist h auf Ω harmonisch und auf $\bar{\Omega}$ stetig, dann nimmt h sein Maximum/Minimum auf $\partial\Omega$ an.

Gegeben sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ wie oben, auf $\partial\Omega$ sei eine stetige Funktion $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht ist eine Funktion

$$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) u $2 \times$ stetig diffbar auf Ω
- (ii) u stetig auf $\bar{\Omega}$
- (iii) $\Delta u = 0$ auf Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$

Diese Aufgabe heißt Dirichlet's Randwertproblem.

SATZ 4. Die Dirichlet'sche Randwertaufgabe hat höchstens eine Lösung.

Beweis: seien u_1, u_2 Lösungen $\Rightarrow u = u_1 - u_2$ ist harmonisch mit $u(\vec{x}) = 0$ auf $\partial\Omega$.

Maximumsprinzip: $u(\vec{x}) \leq 0$ auf Ω .

Minimumsprinzip: $u(\vec{x}) \geq 0$ auf Ω .

$\Rightarrow u = 0, u_1 = u_2$

Green'sche Darstellungen:

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{du}{d\vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{s} \quad (*)$$

für alle u, v 2mal stetig diffbar auf $\bar{\Omega}$

$\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} r^{2-n} & (n \geq 3) \\ \frac{1}{2\pi} \log r & (n = 2) \end{cases}$$

$N_{\vec{a}} = \Gamma(\|\vec{x} - \vec{a}\|_2)$ "Newton-Potenzial" mit Singularität in $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\|\vec{x} - \vec{y}\|)$

$\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(\vec{x}, \vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow \mathbb{R}$

(Achtung: Γ hat 2 Bedeutungen; aus Variablen klar!)

Klar: für festes \vec{y} ist $\vec{x} \mapsto \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ harmonisch auf $\vec{x} \neq \vec{y}$, und umgekehrt.

Ziel: wähle für festes $\vec{y} \in \Omega$, $v(\vec{x}) = \Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in (*).

Wende (*) an auf $\Omega \setminus K_r(\vec{y})$, r so klein, dass $K_r(\vec{y}) \subset \Omega$.

$$\int_{\Omega \setminus K_r(\vec{y})} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u \, d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{s} - \int_{\partial K_r(\vec{y})} \left(\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{s} \quad (0)$$

Berechne das letzte Integral für $r \searrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_r(\vec{y})} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\vec{s} &= \Gamma(r) \int_{\partial K_r(\vec{y})} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\vec{s} = \Gamma(r) \int_{\partial K_r(\vec{y})} \langle \nabla u, \vec{n} \rangle d\vec{s} \\ \left| \int_{\partial K_r(\vec{y})} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\vec{s} \right| &\leq |\Gamma(r) r^{n-1} \omega_n \max_{\partial K_r(\vec{y})} |\nabla u| \xrightarrow{\text{mit } r \rightarrow 0} 0 \quad r \log r \rightarrow 0; r \rightarrow 0 \text{ (bei } r \rightarrow 0) \\ \int_{\partial K_r(\vec{y})} u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} d\vec{s} &= \Gamma'(r) \int_{\partial K_r(\vec{y})} u d\vec{s} \rightarrow u(\vec{y}) \end{aligned}$$

(weil $\int_{\partial K_r(\vec{y})} u d\vec{s} \sim \omega_n r^{n-1} u(\vec{y})$). Mit $r \rightarrow 0$ folgt aus (0):

$$(1) \quad \boxed{u(\vec{y}) = \int_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u \, d\vec{x} - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{s}}$$

”Green’sche Darstellungsformel” für $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar.

Spezialfälle: (1) ist u harmonisch auf Ω , dann gilt

$$u(\vec{y}) = - \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial \Gamma}{\partial \vec{n}} \right) d\vec{s} \quad (2)$$

Ist aber $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar und $u(\vec{x}) = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus K_r(\vec{0})$ mit $R > 0$ geeignet, dann gibt (1) mit $\Omega = K_{2R}(\vec{0})$

$$u(\vec{y}) = \int_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{x}) \, d\vec{x} \quad (3)$$

Wichtige Folgerung:

SATZ 5. Ist u harmonisch auf Ω , dann gilt (2), u ist ∞ oft diffbar auf Ω . Ist $\vec{a} \in \Omega$ und $K_r(\vec{a}) \subset \Omega$, dann konvergiert die formale Taylorreihe von u mit Entwicklungspunkt \vec{a} auf $K_r(\vec{a})$ absolut.

(aus (2) ablesen)

Wiederholung:

Green'sche Darstellungsformel: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stückweise stetig diffbares reguläres Polyeder und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 2mal stetig diffbar, dann gilt

$$u(\vec{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial\Gamma}{\partial\vec{u}(\vec{x})} - \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} \right) d\vec{s} + \int_{\Omega} \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{x}) d\vec{x}$$

mit

$$\Gamma(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r & (n = 2) \\ \frac{r^{2-n}}{(2-n)(\text{Oberfl. } \|\vec{x}\|_2=1)} & (n \geq 3) \end{cases}; \quad \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$$

Ziel: bringe den Term mit $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}$ zum Verschwinden!

Idee: 2. Green'sche Formel mit $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch

$$\int_{\Omega} (u\Delta h - h\Delta u) d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \left(-h \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} + u \frac{\partial h}{\partial\vec{n}} \right) d\vec{s}$$

Addiere dies auf die Darstellungsformel; $G = \Gamma + h$

$$u(\vec{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial\vec{u}}(\vec{x}, \vec{y}) - G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} \right) d\vec{s} + \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}) \Delta u(\vec{x}) d\vec{x}$$

Ist u harmonisch, dann:

$$u(\vec{y}) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial\vec{n}} - G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial u}{\partial\vec{n}} \right) d\vec{s}$$

Wähle $h = h_{\vec{y}}$ so, dass $h_{\vec{y}}(\vec{x}) = -\Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ in jedem $\vec{x} \in \partial\Omega$

Geht das, dann wird

$$u(\vec{y}) = \int_{\partial\Omega} u(\vec{x}) \frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x})$$

Def.: gibt es obiges h , dann heißt $G = G(\vec{x}, \vec{y}) = \Gamma(\vec{x}, \vec{y}) + h_{\vec{y}}(\vec{x})$ Green'sche Funktion von Ω .

Existenz von $h_{\vec{y}} \Leftrightarrow$ lösen einer speziellen Randwertaufgabe für Ω . Hat man aber G und Randdaten $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist

$$u(\vec{y}) = \int_{\partial\Omega} g(\vec{x}) \frac{\partial G}{\partial\vec{n}}(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x})$$

eine (und die einzige) Lösung von $\Delta u = 0$, $u = g$ (auf $\partial\Omega$).

Für Kugeln kann die Green'sche Funktion explizit angegeben werden;

$K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$; $\hat{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2}$ "Spiegelung an der Kugel":

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} \Gamma(\|\vec{x} - \vec{y}\|) - \Gamma(\|\vec{y}\|_2 \|\vec{x} - \hat{\vec{y}}\|_2) & (\vec{y} \neq 0) \\ \Gamma(\|\vec{x}\|) - \Gamma(1) & (\vec{y} = 0) \end{cases}$$

⇒ Green'sche Funktion für K .

Zeige: $G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x}) \leq 0$ auf $K \times K$

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{(\text{Oberfl. } K)} \frac{1 - \|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^n} = \frac{1 - \|\vec{y}\|_2^2}{\omega_n \|\vec{x} - \vec{y}\|^n}$$

Poisson'sche Integralformel: Ist $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$ und $u : K \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, dann gilt:

$$u(\vec{y}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\vec{x}\|=1} u(\vec{x}) \frac{1 - \|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^n} d\vec{s} \quad (\|\vec{y}\| < 1)$$

(nochmal: im Inneren von K lässt sich u in jedem Punkt \vec{a} lokal durch seine formale Taylorreihe darstellen, deren Konvergenzradius ist (mindestens) $1 - \|\vec{a}\|_2$.)

Lösung der Dirichlet'schen Randwertaufgabe für $K = \{\|\vec{x}\| \leq 1\}$.

Gegeben seien $g : \{\|\vec{x}\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist durch

$$u(\vec{y}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\vec{x}\|=1} g(\vec{x}) \frac{1 - \|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^n} d\vec{s}(\vec{x}) \quad (\|\vec{y}\|_2 < 1)$$

eine auf K stetige und auf $\|\vec{x}\| < 1$ harmonische Funktion u gegeben.

Beweis: $\Delta u = 0$ auf $\|\vec{x}\| < 1$, denn $K(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1 - \|\vec{y}\|^2}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^n}$ ist als \vec{x} -Normalenableitung der in \vec{y} harm. Funktion $G(\vec{x}, \vec{y})$ wieder harmonisch in \vec{y} .

Noch zu zeigen: wird $u(\vec{x}) = g(\vec{x})$ auf ∂K gesetzt, dann ist u auch auf δK stetig.

$$1 = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\vec{x}\|=1} K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x}) \quad (u \equiv 1 \text{ in Poisson})$$

Sei $\vec{x}_0 \in \partial K$, d.h. $\|\vec{x}_0\| = 1$.

$$g(\vec{x}_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\vec{x}\|=1} g(\vec{x}_0) K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x}) = u(\vec{x}_0).$$

Für jedes $\vec{y} \in K$ ist

$$\frac{1}{\omega_n} \int g(\vec{x}) K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x}) = u(\vec{y})$$

$$u(\vec{y}) - u(\vec{x}_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\vec{x}\|=1} (g(\vec{x}_0) - g(\vec{x})) K(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{s}(\vec{x}) \rightarrow 0 \text{ für } \vec{y} \rightarrow \vec{x}_0$$

Die Lösung der Randwertaufgabe funktioniert auch, wenn $g : \{\|\vec{x}\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Sprungstellen ist; und nur dort ist Funktion auf dem Rand nicht stetig.

Letzter Satz: Sei Ω Polyeder wie immer. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch
- (ii) u hat Mittelwerteigenschaft auf $K_r(\vec{a}) = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{a}\|_2 \leq r\}$ mit $K_r(\vec{a}) \subset \Omega$, d.h.

$$u(\vec{a}) = \frac{\int_{\partial K_r(\vec{a})} u(\vec{x}) d\vec{s}}{\int_{\partial K_r(\vec{a})} d\vec{s}}$$

- (iii) Für jedes K wie oben ist

$$\int_{\partial K_r(\vec{a})} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\vec{s} = 0$$

Beweis:

(i) \Rightarrow (iii) Satz 1

(i) \Rightarrow (ii) Satz 2

(ii) \Rightarrow (i) u hat Mittelwerteigenschaft, genügt also Max- und Minimumsprinzip

Wähle harmonische Funktion h , die auf $\|\vec{x} - \vec{a}\| = r$ dieselben Werte wie u hat.

$h - u$ ist $= 0$ auf $\|\vec{x} - \vec{a}\| = r$ und hat Mittelwerteigenschaft; genügt also Max- und Minimumsprinzip.

$\Rightarrow h - u \equiv 0$ auf $K_r(\vec{a})$; $u = h$.

(iii) \Rightarrow (i) Übung!

Allgemeiner:

$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ("Quelldichte")

$g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig).

Gesucht: $\Delta u = \varphi$, $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Ist $\Delta u_1 = \Delta u_2 = \varphi$, dann ist $\Delta(u_1 - u_2) = 0$

Idee: Löse

$\Delta u_0 = \varphi$ mit $u_0 \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ (Wie? HM IV)

$\Delta u_1 = 0$ mit $u_1 = g$ auf $\partial\Omega$

$\Rightarrow u_0 + u_1$ ist spezielle Lösung des gestellten Problems, und sogar die einzige!

7.7 Der Satz von Stokes

$V = (V_1, V_2, V_3) : G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diffbar.

$$\operatorname{rot} V = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)$$

$\operatorname{rot} V = \nabla \times V \quad \operatorname{rot} V = 0 \Leftrightarrow$ Integrabilitätsbedingung für V

Ist G sternförmig, dann gilt:

V ist Gradientenfeld $\Leftrightarrow \operatorname{rot} V = 0$.

Gegeben: reguläre Fläche $\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, berandet durch einen geschlossenen Weg $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$

”oben” auf der Fläche sei dort, wo die Fläche links vom Durchlaufen des Randes liegt.

Auf der Fläche gibt’s dann ein ”nach oben zeigendes” Einheitsnormalenfeld.

Klassischer Satz von Stokes: Für diffb. Vektorfelder V gilt

$$\int_{\varphi} \langle V, d\vec{x} \rangle = \int_{\gamma} \langle \operatorname{rot} V, \vec{n} \rangle dv$$

Beweis im Spezialfall:

$$\int_{\gamma} \langle \operatorname{rot} V, \vec{n} \rangle dv = \int_U \langle \operatorname{rot} V(\gamma(\vec{u})), \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\|} \rangle \text{Maßtensor } d\vec{u}$$

Wende jetzt den ebenen Gauß’schen Satz an!

Cartan-Kalkül. Benutze (im \mathbb{R}^n) n verschiedene Symbole dx_1, \dots, dx_n . Ist V ein VF, dann

bilde damit den formalen Ausdruck $V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n = \langle V; \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \rangle$

(ein solcher Ausdruck heißt ”Differentialform”; 1-Form)

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar. Dann soll $df := \langle \nabla f, d\vec{x} \rangle$ die ”Gradientenform” sein.

”formal” sollen ”Produkte” von dx_j definiert werden. dx_i messen Längen, also sollen Produkte von zwei dx_i Flächen, von dreien Volumina etc messen. Dies soll Vorzeichenempfindlich geschehen!

Für dieses Produkt schreibe $dx_1 \wedge dx_j$ ($\wedge dx_k \dots$ etc)

Rechenregeln: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \quad \forall i, j$

Insbesondere ist dann $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Eine k -Form (k -Differentialform) ist ein Ausdruck

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(\vec{x}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Motivation für den nächsten Schritt: Transformationsformel!

$$\int_G f(\vec{x}) d\vec{x} \quad d\vec{x} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$\Phi : U \rightarrow G$ diffbar, bijektiv $\vec{x} = \Phi(\vec{y}) = (\varphi_1(\vec{y}), \dots, \varphi_n(\vec{y}))$

Hier ist

$$f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\Phi(\vec{y})) d\varphi_1(\vec{y}) \wedge d\varphi_2(\vec{y}) \wedge \dots \wedge d\varphi_n(\vec{y})$$

$$d\varphi_1(\vec{y}) = \langle \nabla \varphi_1(\vec{y}), d\vec{y} \rangle = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} dy_n$$

$$\begin{aligned} d\varphi_1(\vec{y}) \wedge \dots \wedge d\varphi_n(\vec{y}) &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} dy_n \right) \wedge \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} dy_n \right) \wedge \dots \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{i_1}} dy_{i_1} \wedge \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_{i_2}} dy_{i_2} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{i_n}} dy_{i_n} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{\sigma(1)}} \dots \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_{\sigma(n)}} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \right) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \end{aligned}$$

$$\int_G f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_U f \cdot \Phi(\det J_\Phi d\vec{y}) = \int f \cdot \Phi(\vec{y}) d\Phi(\vec{y})$$

Die "Ableitung von Differentialformen $d: (k\text{-Formen}) \rightarrow (k+1\text{-Formen})$

Eine 0-Form sei eine diffbare Funktion. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$df := \langle \nabla f, d\vec{x} \rangle; \quad d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k}(\vec{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

dx_i = Messapparat in i -ter Koordinatenrichtung.

$dx_i \wedge dx_j$ = Flächenmesser in i - j -Koordinatenebene.

Eine k -Differentialform ist Linearkombination von k -dim. Messapparaten

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Es soll gelten

$$\boxed{dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i} \quad \boxed{dx_i \wedge dx_i = 0}$$

Eine k -Differentialform auf \mathbb{R}^n ist also

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(\vec{x}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

0-Formen $\hat{=}$ Funktionen.

$\Omega^{(k)}$ = VR der k -Differentialformen auf \mathbb{R}^n .

$\Omega^{(0)}$ = Fkt. auf \mathbb{R}^n ;

$\Omega^{(1)}$ = $\left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\vec{x}) dx_i \right\} \leftrightarrow$ VF auf \mathbb{R}^n ; $(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$

$\Omega^{(2)}$ = $\left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(\vec{x}) dx_i \wedge dx_j \right\}$ kein VF, es sei denn, $n = 3$

$\Omega^{(n)}$ = $\{ f(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \}$

$\Omega^{(n-1)}$ = $\{ f_1(\vec{x}) dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n - f_2(\vec{x}) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n + f_3(\vec{x}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots + (-1)^{n+1} f_n(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \}$

Dazu bilde VF $(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$

Also gehört zu jedem VF $(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$ auf \mathbb{R}^n gehört also die 1-Form $\omega(f) = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ und einer $n-1$ -Form $\varphi(f) = f_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots + \dots + (-1)^{n+1} f_n(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$

Eine k -Differentialform heißt stetig, diffbar, stetig diffbar, etc, wenn dies für alle $f_{i_1 \dots i_k}(\vec{x})$ gilt.

Definiere eine "Ableitung" $d: \Omega^{(k)} \rightarrow \Omega^{(k+1)}$ wie folgt:

$$d: \Omega^{(0)} \rightarrow \Omega^{(1)}: df(\vec{x}) := \langle \nabla f, d\vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$d: \Omega^{(k)} \rightarrow \Omega^{(k+1)}$ linear;

$$d \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(\vec{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1 \dots i_k}(\vec{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Beispiel:

$$(1) \omega = x_1 dx_1 + x_1 x_2 dx_2 + x_3 dx_4$$

$$\begin{aligned} d\omega &= dx_1 \wedge dx_1 + d(x_1 x_2) \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \\ &= 0 + (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \\ &= x_2 dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \end{aligned}$$

(2) Sei $(f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$ ein VF. Bilde dazu die $n-1$ -Form $\varphi(f)$

$$\begin{aligned} d\varphi(f) &= df_1(\vec{x}) \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots + (-1)^{n+1} df_n(\vec{x}) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \\ &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \dots \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div}(f_1, \dots, f_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

- (3) (Wiedererkennen der Rotation). Sei $V = (V_1, V_2, V_3)$ sein VF auf \mathbb{R}^3 ;
 $\omega(V) = V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + V_3 dx_3$ die zugeordnete 1-Form.

$$\begin{aligned} d\omega(V) &= dV_1 \wedge dx_1 + dV_2 \wedge dx_2 + dV_3 \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 + \dots \\ &= \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad - \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \right) dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

SATZ 1. $dd\omega = 0$

für jedes 2-mal stetig diffbare $\omega \in \Omega^{(k)}$ mit $k \leq n - 2$

Beispiele: ist $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig diffbar

$$ddf = 0 \Leftrightarrow \text{rot } \nabla f = 0$$

Ist V ein 2-mal stetig diffbares VF auf \mathbb{R}^3 , dann ist $dd\omega(V) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{div rot } V = 0$$

Beweis: wir zeigen für 2-mal stetig diffb. Fkt. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $ddf = 0$ durch Nachrechnen.

Dann ist

$$\begin{aligned} dd \sum_{i_1, \dots, i_k} f_{i_1 \dots i_k}(\vec{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} &= \sum ddf_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ ddf &= \sum_{i=1}^n d \frac{\partial f}{\partial x_i} \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i \leq j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)}_{=0} dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

SATZ 2 (Lemma vom Poincare). Ist $\omega \in \mathbb{R}^{(k)}$ auf einem Sterngebiet mit $d\omega = 0$, dann gibt es $\alpha \in \Omega^{(k-1)}$ mit $d\alpha = \omega$

Integration von Differentialformen

Auf der Kurve: "Messapparat": ds

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2$$

Ist die Kurve durch eine Parametrisierung gegeben: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

$$ds = \sqrt{d\gamma_1(t)^2 + \dots + d\gamma_n(t)^2}$$

$$= \sqrt{\gamma_1'(t)^2 (dt)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2 (dt)^2} = \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

Bei einem VF $V = (V_1, \dots, V_n)$ bilde dazu die 1-Form

$$\omega = V_1 dx_1 + \dots + V_n dx_n.$$

Ist γ wie vorher, dann definiere "die zurückgeholte Form"

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= V_1(\gamma(t)) d\gamma_1(t) + \dots + V_n(\gamma(t)) d\gamma_n(t) \\ &= \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \end{aligned}$$

Wir *definieren* für eine 1-Form zum VF V und einen regulären Weg γ das Integral

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega dt = \int_a^b \langle V \cdot \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt$$

Ist allgemeiner $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(\vec{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ eine stetige k -Form auf \mathbb{R}^n und

$\gamma : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein reguläres Flächenstück, dann schreibe $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ und setze

$$\begin{aligned} \gamma^* \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k}(\gamma(\vec{u})) d\gamma_{i_1}(\vec{u}) \wedge \dots \wedge d\gamma_{i_k}(\vec{u}) \\ &= g(\vec{u}) du_1 \wedge \dots \wedge du_n \\ &\quad \uparrow \text{Rechenregeln für 1} \end{aligned}$$

Setze dann:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_U g(\vec{u}) du_1 \dots du_n$$

Diese Definition des Integrals ist so gebaut, dass die Transfo-formel enthalten ist: ist

$$\omega = f(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine n -Form, dann ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int \omega = \int_U f(\vec{x}) d\vec{x}$$

$$\vec{x} = \Phi(\vec{u}) = (\Phi_1(\vec{u}), \dots, \Phi_n(\vec{u}))$$

$$\Phi^* \omega = f \cdot \Phi(\vec{u}) \det \Phi(\vec{u}) du_1 \wedge \dots \wedge du_n$$

$$\int \Phi^* \omega d\vec{u} = \int f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Beispiel: Gegeben VF $V = (V_1, V_2, V_3)$; das Flussintegral über $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_3 > 0$ soll berechnet werden.

Interpretiere das VF als 2-Form im \mathbb{R}^3 :

$$\omega = V_1(\vec{x}) dx_2 \wedge dx_3 + V_2(\vec{x}) dx_3 \wedge dx_1 + V_3(\vec{x}) dx_1 \wedge dx_2$$

Parametrisiere das Int-Gebiet:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \varphi \cos \psi; & dx_1 &= -\sin \varphi \cos \psi d\varphi - \cos \varphi \sin \psi d\psi \\ x_2 &= \sin \varphi \cos \psi & dx_2 &= \cos \varphi \cos \psi d\varphi - \sin \varphi \sin \psi d\psi \\ x_3 &= \sin \psi & dx_3 &= \cos \psi d\psi \end{aligned}$$

$$\text{mit } \boxed{0 < \varphi < 2\pi; 0 < \psi < \frac{\pi}{2}} \quad dx_2 \wedge dx_3 = \cos \varphi \cos^2 \psi d\varphi \wedge d\psi$$

Dann ist also das Flussintegral

$$\begin{aligned} &= \int_{\text{Halbkugel}} \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} V_1(\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi) \cos \varphi \cos^2 \psi d\varphi d\psi \\ &\quad + \int \int V_2(\dots) \dots + \int V_3(\dots) \dots \end{aligned}$$

Der allgemeine Stokes'sche Satz

Im \mathbb{R}^k kennen wir "reguläre Polyeder".

Im \mathbb{R}^n sei ein solches k -dimensionales Polyeder das Bild unter einer injektiven diffb. Abbildung von einem k -dim. Polyeder im alten Sinne.

Sei jetzt $G \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dim. reguläres Polyeder; dessen Rand ist dann eine $k-1$ -dim. (stückweise) reguläre Fläche ∂G .

Sei ω eine stetig diffbare $k-1$ -Form. Dann gilt

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega \quad \text{"allgemeiner Stokes'scher Satz"}$$

Begründung (und Spezialfälle):

$G \subset \mathbb{R}^n$ reguläres Polyeder; Vektorfelder $V = (V_1, \dots, V_n)$ entsprechen $n-1$ -Formen:

$$\omega = V_1(\vec{x}) dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n - V_2(\vec{x}) dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} V_n(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Flussintegral von } V \text{ über } \partial G &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_G \operatorname{div} V d\vec{x} \\ &= \int_{\partial G} \omega && \int_G d\omega \end{aligned}$$

Genauso: im \mathbb{R}^3 entsprechen VF sowohl 1-Formen als auch 2-Formen.

Dann ist der allgemeine Stokes'sche Satz der klassische (mit rot)

Beweis i.A.: benutze eine k -dim. Karte und wende dort Gauß an!

Man sieht hier: \wedge ist der "richtige" Ersatz für das Vektorprodukt.

Übung: $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 = \varphi$; $\psi = b_1 dx_1 + \dots + b_3 dx_3$

Berechne $\varphi \wedge \psi$. Was hat das mit $\vec{a} \times \vec{b}$ zu tun?

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) dx_1 \wedge dx_2$$

Bei richtiger Interpretation liefert der allgemeine Stokes'sche Satz für 0-Formen den Zusammenhang zwischen Potential und Arbeitsintegral

0-Form \Leftrightarrow Funktion $f(\vec{x})$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \langle \nabla f, d\vec{x} \rangle \quad \text{1-Form}$$

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein regulärer Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} \langle \nabla f, d\vec{x} \rangle = \int_{\gamma} df$$

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_{\partial\gamma} f =: f|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \leftarrow \text{"0-dim. Integral"}$$

Literatur dazu: H. Grauert, I. Lieb, Differential- und Integralrechnung III, 2. Aufl. oder höher; "Veranschaulichung von Diff.-Formen, Anw. auf Elektrodynamik"

Differentialformen und Elektrodynamik

Disclaimer: hier wird *niemals* behauptet, traditionelle Darstellungen seien "nicht richtig". Selbstverständlich lässt sich Feldtheorie mit der Sprache der Vektoranalysis sachgerecht beschreiben.

Aber: Physikalische Messungen finden in einem "Bezugssystem" (math.: Koordinatensystem) statt. Ändert sich das Koordinatensystem, dann auch die Messung nach einigen gewissen Gesetzen. Deshalb sollte zur Beschreibung ein mathematisches Objekt gewählt werden, das *dasselbe* Transformationsverhalten hat.

Beispiel:

Randkurve sei gegeben durch $r = r(\varphi)$; $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ist A die eingeschl. Fläche, dann

$$A = \int_{\gamma} x dy$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} r(\varphi)(\cos \varphi) d(r(\varphi) \sin \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} r(\varphi) \cos \varphi (r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Warnung: Was im \mathbb{R}^3 auf den ersten Blick wie ein Vektorfeld aussieht, kann als 1- oder 2-Form modelliert werden. Das Trafo-Verhalten von 1- und 2-Formen ist aber *völlig anders*.

Das Experiment oder sogar schon der Modellierungsansatz entscheiden also, *was* im konkreten Fall vorliegt.

Kräfte F sind anschaulich Vektorfelder $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die **Arbeit** wird durch ein **Kurvenintegral** beschrieben.

Hier wird die Information entlang 1-dim. Mgfkt. abgefragt. Deshalb sind Kräfte/Kraftfelder grundsätzlich 1-Formen

$$F = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

und die **Arbeit** entlang eines Weges W ist $\int_W F$.

Deshalb ist auch die ”**elektrische Feldstärke**” eine 1-Form.

Denn: gegeben Punktladung e zur Zeit t in $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Gibt’s auch auf \mathbb{R}^3 ein elektrisches Feld, dann wirkt auf diese Ladung in \vec{x} in Richtung $\text{var } \xi$ (mit $\|\vec{\xi}\|_2 = 1$) eine zu e proportionale Kraft $eF(\vec{x}, \vec{\xi}, t)$.

Dies kann als linear in $\vec{\xi}$ angesehen werden. Wähle $e = 1$ und $\vec{\xi}_r = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Mit diesem $\vec{\xi}_r$ sei $E_r(s, t) = F(\vec{x}, \vec{\xi}_r, t)$ und

$$F = \sum_{r=1}^3 E_r(\vec{x}, t) dx_r$$

Denn 1-Form ist die ”**elektr. Feldstärke**”.

Magnetische Feldintensität ist eine 2-Form.

Induktionsexperiment: In einem Magnetfeld befinde sich ein geschlossener Leiter L .

Zum Zeitpunkt t_0 werde der Leiter aus dem Magnetfeld entfernt, zur Zeit t_1 sind wir damit

fertig.

Befund: in L wird ein "Spannungsstoß" S beobachtet, der *nicht* von der Art abhängt, wie L aus dem Feld herausbewegt wird:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_L E \right) dt$$

Vertausche Integrationen: $S = S(L) = \int_L \varphi$ mit 1-Form φ , die durch Integration von E nach t entsteht. Stokes: in L eine Fläche einspannen, diese sei A mit $\partial A = L$. Dann

$$S = \int_A d\varphi$$

Die 2-Form $d\varphi$ heißt **magn. Feldintensität** B

$$B = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$

Wegen $B = d\varphi$ und $d(d\varphi) = 0$ gilt die

1. Maxwell'sche Gleichung $dB = 0$

traditionelle Schreibweise: $B \leftrightarrow (B_1, B_2, B_3)$

$$dB = 0 \leftrightarrow \operatorname{div}(B_1, B_2, B_3) = 0$$

Ganz ähnlich lässt sich die

2. Maxwell'sche Gleichung $-dE = \frac{d}{dt} B$

begründen und dann die (relativistische) E-Dynamik aufbauen.

8 Funktionentheorie

8.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Gegenstand sind Funktionen auf offenen Teilen $U \subset \mathbb{C}$ mit Werten in \mathbb{C} ; $f : U \rightarrow \mathbb{C}$

Durch Identifikation $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$; $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kann $f = g + ih$ mit **reellen** Funktionen $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ auch als VF auf U verstanden werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix} \quad (*)$$

Wir nennen f stetig, (reell) diffbar, reell stetig diffb. etc., wenn dies für das VF (*) gilt.

Seien f, U wie zuvor, $z_0 \in U$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0),$$

dann heißt f in z_0 **komplex diffbar**, und $f'(z_0)$ heißt Ableitung von f in z_0 .

Beispiele:

- (i) konstante Funktionen sind komplex diffb. mit Ableitung 0.
- (ii) $f(z) = z$ hat $f'(z) = 1$.
- (iii) $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}$; $z^k - z_0^k = (z - z_0)(z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + z_0^{k-1})$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = z^{k-1} + z^{k-2}z_0 + \dots + z_0^{k-1} \rightarrow kz_0^{k-1} = f'(z_0)$$

SATZ 1 (einfache Rechenregeln). Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$, komplex diffbar in $z_0 \in U$.

- (i) Auch $f + g$ ist diffb. in z_0 , und es gilt $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- (ii) Auch fg ist diffbar in z_0 , und es gilt $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

SATZ 2 (Kettenregel). Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen,

$f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow \mathbb{C}$. Es sei f in z_0 und g in $f(z_0)$ komplex diffbar. Dann ist auch $g \circ f$ in z_0 komplex diffb, und es gilt

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

(wörtl. wie für Fkt. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in HM I)

Insbesondere sind Polynome komplex diffbar.

Geometrische Bedeutung der komplexen Ableitung:

Im Reellen: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (Taylorpolynom!) ist die beste lineare Approximation.

Im Komplexen: $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ ist die beste lineare Approx. vom Typ $f(z_0) + c(z - z_0)$, mit $c \in \mathbb{C}$

Betrachte die lineare Abb. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $z \mapsto cz$

$c = |c|e^{i\varphi}$. Dann wird z gestreckt um Faktor $|c|$ und um den Winkel φ gedreht (Drehstreckung); $c = a + ib$, $z = x + iy$

$z \mapsto cz$ kann dann als Abb. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aufgefasst werden.

Also: jede komplexe diffb. Abb. $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stellt in der Nähe von z_0 eine gestörte Drehstreckung mit Faktor $f'(z_0)$ dar. Insbesondere gilt:

für zwei Kurven durch z_0 bleibt bei den Bildkurven der Schnittwinkel erhalten, auf die Tangentialvektoren in $f(z_0)$ werden mit $|f'(z_0)|$ multipliziert, sobald $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Solche Abbildungen heißen **winkeltreu**. Winzige Dreiecke werden (bis auf Störung) auf ähnliche abgebildet ("konform").

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 komplex diffb. dann ist das aus $f = g + ih$ gewonnene VF reell diffbar:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(x, y) + ih(x, y) - g(x_0, y_0) - ih(x_0, y_0)}{x - x_0 + i(y - y_0)} \\ &= \lim_{\substack{y=y_0 \\ x \rightarrow x_0}} \frac{g(x, y_0) + ih(x, y_0) - g(x_0, y_0) - ih(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Jacobi-Matrix für das VF: $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}$

Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen:

f ist in z_0 komplex diffb.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \text{ in } (x_0, y_0)$$

Wiederholung:

$U \subset \mathbb{C}$ offen; $f : U \rightarrow \mathbb{C}$

f heißt in $z_0 \in U$ komplex diffbar, wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existiert. Insbesondere sind Polynome $p(z) = a_1 z^n + \dots + a_1 z + a_0$ sind diffbar;

$$p'(z) = n a_n z^{n-1} + \dots + a_1$$

$f = g + ih$ mit $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$

SATZ 1. (Cauchy-Riemann'sche Dgl) $f = g + ih : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex diffb.

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)}; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

Beispiel: $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; $z \mapsto e^z$ ist auf ganz \mathbb{C} komplex diffbar

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Also $g = e^x \cos y$, $h = e^x \sin y$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Beispiel: $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$; $z \mapsto \frac{1}{z}$

$$\frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \frac{z_0 - z}{z z_0} \cdot \frac{1}{z - z_0} = \frac{-1}{z z_0}$$

ist überall diffbar auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$

Sind Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf ihrem Def-Bereich überall komplex diffbar, dann heißt f **holomorph** auf U (*alt: analytisch; engl.: regular*); ist $U = \mathbb{C}$, dann heißt f **ganze Funktion** "exp ist ganz".

SATZ 2. Sei $f = g + ih : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph; g, h seien als Funktion von x, y 2-mal diffbar. Dann gilt $\Delta g = \Delta h = 0$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &\stackrel{\text{CR}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} \stackrel{\text{CR}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Umgekehrt kann zu jeder harmonischen Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ gefunden werden, so dass $g + ih$ holomorph auf U ist.

(nach CR-Dgl); h ist bis auf Konstanten eindeutig.

In diesem Sinne: Fkt.-Theorie \Leftrightarrow harmonische Fkt. auf \mathbb{R}^2 .

8.2 Kurvenintegrale

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; f = g + ih; g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$, stetig

Dann setze $\int_I f(t) dt = \int_I g(t) dt + i \int_I h(t) dt$

Sei jetzt $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ ein stückweise stetig diffbarer Weg.

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma(t) \in U \forall t \in I$

$$\int_{\gamma} f dz := \int_I f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Zerlege dies in Re und Im: $f = g + ih; \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ mit reellen Funktionen g, h, γ_1, γ_2 .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma} f dz &= \int_{\gamma} \operatorname{Re}(f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt = \int_I (g(\gamma(t))\gamma_1'(t) - h(\gamma(t))\gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_I \left\langle \begin{pmatrix} g(\gamma(t)) \\ -h(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{\gamma} \left\langle \begin{pmatrix} g \\ -h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} \left\langle \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle$$

Also: $\operatorname{Re} \int_{\gamma} f dz, \operatorname{Im} \int_{\gamma} f dz$ sind gewöhnliche Kurvenintegrale von VF.

Spezialfall: sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Randkurve eines Gebietes G ,

$\bar{G} = G \cup \partial G \subset U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Gauß:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} g dx - h dy \\ &= \int_G d(g dx - h dy) = \int_G \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial h}{\partial x} dx \wedge dy \\ &= \int_G \underbrace{\left(-\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} \right)}_{=0 \text{ nach CR}} dx dy = 0; \text{ genauso für Im (benutze die andere CR)} \\ &= 0 \text{ nach CR} \end{aligned}$$

SATZ 1 (Cauchy'scher Integralsatz). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ Randkurve eines Gebiets G mit $G \cup \partial G \subset U$. Dann ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

(es gilt die Umkehrung: ist $\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0$ für jede Kreisscheibe $\{|z - z_0| \leq r\} \subset U$ dann ist f schon holomorph)

WARNUNG: auf $G \cup \partial G \subset U$ kann nicht verzichtet werden:

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ (auf } \mathbb{C} \setminus \{0\}) \text{ Dann gilt } \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Parametrisiere: $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto e^{it}; \gamma'(t) = ie^{it}$

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi i$$

Fixiere ein $z_0 \in U$:

$$F(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

F ist holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$,

in z_0 ist F zumindest stetig.

Sei Γ der Weg wie in der Skizze.

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} F(z) dz = 0$$

Dieses Argument zeigt:

$$\int_{\gamma} F(z) dz = 0$$

Also:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

SATZ 3 (Cauchy'sche Integralformel). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Sei γ die Randkurve eines Gebietes G mit $G \cup \partial G \subset U$ und $z_0 \in G$. Dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(dies ist die komplexe Fassung von der Poisson-Darstellung).

Übung: bilde Realteil und gewinne Poisson für Dimension 2 zurück!

SATZ 4. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann ist auch die Ableitung $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Insbesondere ist f beliebig oft komplex diffbar, alle Ableitungen sind holomorph.

Sei $z_0 \in U$; wähle $r > 0$ so klein, dass $|z - z_0| \leq r$ ganz in U

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Für jedes w mit $|w - z_0| < r$

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - w} dz \Rightarrow f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{\partial}{\partial w} \frac{f(z)}{z - w} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz \end{aligned}$$

Wiederholung:

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Sei γ ein geschlossener Int-Weg in U ; das Innere G liege links, $G \cup \partial G \subset U$.

(1) (Cauchy's Int-Satz) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

(2) Ist $z_0 \in G$, dann gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

(3)

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

(3) heißt Cauchysche Integralformel für die Ableitungen; insbesondere ist *jede* holomorphe Funktion beliebig oft diffbar; alle Ableitungen sind holomorph.

Beispiele: Sei f holomorph auf $|z| < R$ mit $R > 1$. Dann ist

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz$$

$$z = e^{it}; 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(e^{it})}{e^{it}} = \frac{ie^{it}}{e^{it}}$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt$$

(i) $f(z) = z$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t dt + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t dt$$

(ii) $f(z) = e^z$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\cos t + i \sin t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\cos t} (\cos \sin t + i \sin \sin t) dt \\
\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos \sin t dt &= 2\pi; \quad \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin \sin t dt = 0
\end{aligned}$$

(iii) $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$, holomorph für $|z| < 2$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{2it} + 4} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{-2it} + 4) dt}{|e^{2it} + 4|^2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

$$|e^{2it}|^2 = (4 + \cos 2t)^2 + (\sin 2t)^2 = 17 + 8 \cos 2t$$

Berechnung der Fresnel-Integrale: $\int_0^{\infty} \sin(t^2) dt, \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt$

$$\int_1^R \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_1^{R^2} (\sin u) \frac{du}{\sqrt{u}} \quad t^2 = u; \quad t = \sqrt{u}; \quad dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}$$

Grobe Idee: integriere e^{z^2}

$$\int_0^{\infty} e^{z^2} dz \stackrel{?}{=} \int_0^{i\infty} e^{z^2} dz = i \int_0^{\infty} e^{it^2} dt$$

Funktionierende Idee: $a \in \mathbb{R}, |a| \leq 1$.

Wir zeigen:

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+ia)^2 t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{1-ia}{1+a^2} \sqrt{\pi}$$

Idee wie oben:

Integriere e^{-z^2} über $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

$$\text{Cauchy: } \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0;$$

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{(R \rightarrow \infty)} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Behauptung: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz = 0$; $z = R + it$, $0 \leq t \leq aR$
denn:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dt \right| &= \left| i \int_0^{aR} e^{-(R+it)^2} dt \right| \\ &= \left| i \int_0^{aR} e^{-(R^2-t^2)} e^{-2itR} dt \right| \\ &\leq e^{-R^2} \int_0^{aR} e^{t^2} dt \leq e^{-R^2} \int_0^{aR} dt \leq \frac{1}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-(1+ia)^2 t^2} (1+ia) dt \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2(1+ia)} = \int_0^{\infty} e^{-(1+ia)^2 t^2} dt}$$

$$z = (1+ia) dt$$

Zerlege in Re/Im:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{1+a^2} \sqrt{\pi} &= \int_0^{\infty} e^{-(1-a^2)t^2} \operatorname{Re} e^{-2iat^2} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1-a^2)t^2} \cos(2at^2) dt; \quad \boxed{a=1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \cos(2t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{16}} = \int_0^{\infty} \sin(2t^2) dt$$

8.3 Konsequenzen der Cauchy'schen Integralformel

Ziel: jede holomorphe Funktion lässt sich durch eine Potenzreihe darstellen; dies ist ihre Taylorreihe.

1. Schritt: Holomorphie bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten.

Definition: Sei $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Fkt.

Die Folge heißt lokal gleichmäßig konvergent auf U , wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in U$ eine Kreisscheibe $|z - z_0| \leq r$ mit $r > 0$ gibt, wo f_n gleichmäßig konvergiert.

SATZ 1. Eine auf U lokal gleichmäßig konvergente Folge f_n holomorpher Funktion hat eine holomorphe Grenzfunktion f .

Wähle eine offene Menge $V \subset U$, auf der f_n gleichmäßig konvergiert. In V wähle abgeschlossene Kreisscheibe K .

Für alle $z \in K \setminus \partial K$ ist

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad \text{für alle } n$$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

SATZ 2. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, dann ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $|z| < R$ holomorph

Beweis:

denn auf $|z| \leq R - \delta$, (jedes $\delta > 0$) konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig, also lokal glm. auf $|z| < R$. Aber $\sum_{n=1}^N a_n z^n$ sind holomorph.

WARNUNG: In Satz 1 angewendet auf f' , folgt auch $f_n' \rightarrow f'$, $f_n'' \rightarrow f''$ etc.

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Potenzreihen liefern auf ihrer Konvergenzkreisscheibe holom. Funktionen

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \text{ ist deshalb auf } \mathbb{C} \text{ holomorph.}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad \text{holomorph}$$

SATZ 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph; $z_0 \in U$. Sei K die größte offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und $K \subset U$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt z_0 auf K gegen f ;

d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = f(z)$$

für alle $z \in K$.

Beispiel: $\exp(z)$ ist auf ganz \mathbb{C} holomorph;

$\exp' = \exp \Rightarrow \exp^{(k)}(0) = 1$. Die Taylorreihe ist also $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, diese *muss* nach Satz 3 auf \mathbb{C} konvergieren. Allgemeiner: ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k = f(z)$ auf ganz \mathbb{C} .

Beispiel: $\frac{1}{1+z^2}$ ist holomorph *nur* auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, also hat die Taylorentwicklung um 0, d.h. $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$ Konvergenzradius 1.

Beweis Satz 3: wähle $R \in \mathbb{R}$ mit $|\omega - z_0| \leq R$ ist ganz in K .

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ gilt dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$$

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{(\omega - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\omega - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\omega - z_0}} = \frac{1}{\omega - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right)^k$$

Für $|\omega - z_0| = R$ ist $\left| \frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} f(\omega) \frac{1}{\omega - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right)^k d\omega \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega - z_0| = R} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \square \end{aligned}$$

SATZ 4 (Identitätssatz). $U \subset \mathbb{C}$ offen. $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ seien holomorph. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ein diffbarer Weg, $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Es gelte $f(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ für $a < t < b$.

$\Rightarrow f = g$ auf U .

Typische Anwendung: ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem reellen Intervall, dann gibt es höchstens *eine* holomorphe Fortsetzung auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$; $I \subset U$.

Ist eine reelle Funktion durch Potenzenreihe gegeben, dann hat diese eine holomorphe Fortsetzung (durch dieselbe Potenzenreihe, und es geht *nur* auf diese Weise).

(analytische Fortsetzung). Seien $U \subset V \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = F(z)$ auf $z \in U$. Dann heißt F analytische Fortsetzung von f . Diese ist eindeutig bestimmt!

Beweis des Identitätssatzes.

Zeige: in $\gamma(b)$ sind *alle* Ableitungen von f und g identisch.

(dann sind die Taylorreihen dieselbe, also auch $f = g$)

$$z_0 = \gamma(b) \quad f(z_0) = g(z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Bewege z nur entlang des Weges. Dort ist $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$, also $f'(z_0) = g'(z_0)$. Analog für höhere Ableitungen.

”Der” komplexe Logarithmus.

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad \Rightarrow \exp(z) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Ist periodisch, Periode ist $2\pi i$ $w = u + iv = \exp(z)$

Wähle $U = \{x + iy\} \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$.

Dann ist U offen; $\exp : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist bijektiv, die Umkehrabbildung heißt (Hauptzweig) des komplexen Logarithmus. Dieser setzt den reellen Logarithmus auf $V := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ fort.

Im Reellen: $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

Im Komplexen: $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$

$$(r > 0, -\pi < \varphi < \pi) \quad \log z = \log |z| + i \arg(z) \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi)$$

Es gilt auch auf $V = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die Formel

$$\boxed{\log' z = \frac{1}{z}}, \text{ denn: } \log \text{ ist nach CR holomorph auf } V, \text{ also auch } \log' z.$$

Für reelle z ist $\log' z = \frac{1}{z}$. Deshalb muss das nach Id-Satz und V richtig bleiben.

Ist also γ_z irgendein Weg, der 1 mit z in V verbindet, dann gilt

$$\log z = \int_{\gamma_z} \frac{d\omega}{\omega} \quad (\text{Erinnerung: } \log x = \int_1^x \frac{dt}{t})$$

(z.B. kann γ_z als Strecke von 1 nach z gewählt werden!)

Satz von Liouville: Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Fundamentalsatz der Algebra: Ist p ein Polynom mit komplexen Koeff. und Grad ≥ 1 , dann hat p in \mathbb{C} eine Nullstelle.

denn: wähle R so groß, dass $\frac{1}{|p(z)|} < 1$ auf $|z| > R$. Auf $|z| \leq R$ hat - wenn $p(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ - $|\frac{1}{p(z)}|$ ein Max, ist also beschränkt.

Liouville: $\frac{1}{p(z)}$ konstant $\Rightarrow p$ konstant.

Ist $p(z_0) = 0$: Taylorentw.: $p(z) = (z - z_0)q(z)$ mit q Polynom.

Folgerung: Jedes komplexe Polynom $p(z)$ vom Grad N kann in der Form

$p(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$ mit $c =$ Leitkoeff. von p geschrieben werden!

Wir nennen die Anzahl $\{z_j = z_0\}$ die Vielfachheit der Nst. z_0 .

z.B. hat z^n in 0 eine n -fache Nst.

$$(z - 1)(z + 1) = z^2 - 1$$

p hat in z_0 eine Nst. der Ordnung $k \Leftrightarrow p(z_0) = p'(z_0) = \dots = p^{(k-1)}(z_0) = 0, p^{(k)}(z_0) \neq 0$

Allgemeiner: ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $z_0 \in U$ und

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots$$

dann heißt z_0 k -fache Nullstelle von f in z_0

z_0 ist genau dann k -fache Nst., wenn $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

In dieser Situation hat f eine Darstellung

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k \underbrace{\left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(z - z_0) + \frac{a_{k+2}}{a_k}(z - z_0)^2 + \dots \right)}$$

d.h. es gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k(z - z_0)^k h(z) \text{ mit } h \text{ holomorph und } h(z_0) = 1 \\ &= a_k((z - z_0)g(z))^k \text{ mit } g \text{ holomorph und } g(z_0) = 1 \end{aligned}$$

Diese Darstellung zeigt: in der Nähe von z_0 ist $f(z)$ in etwa vom Typ $a_k(z - z_0)^k$

Satz von der Gebietstreue

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und *nicht* konstant.

Dann ist $f(U)$ offen.

Warnung: in \mathbb{R} ist das falsch, selbst wenn f durch Potenzreihe gegeben ist: $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

Beweis: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$ konv. auf \mathbb{C} .

Zeige: $f^{(k)}(0) = 0 \quad (k \geq 1) \Rightarrow f(z) = f(0)$

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi R R^{-1-k} \max_{|z|=R} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (\text{wie } R^{-k})$$

Maximum-Prinzip: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- (i) Hat $\operatorname{Re} f$ auf U ein lokales Extremum, dann ist f konstant.
- (ii) Hat $\operatorname{Im} f$ auf U ein lokales Extremum, dann ist f konstant.
- (iii) Hat $|f|$ auf U ein Maximum, dann ist f konstant.

Beweis (iii): hat $|f(z)|$ Max. in $z_0 \in U$, dann liegt $f(U)$ in $\{\omega : |\omega| \leq |f(z_0)|\}$.

Ist aber f nicht konstant, dann enthält $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(z_0) \rightarrow$ Widerspruch
 $\Rightarrow f$ konstant.

Beweis (i): $\operatorname{Re} f$ harmonisch, also konstant. Bis auf Konstanten gibt es *genau* eine harmonische, die $\operatorname{Re} f$ zu einer holomorphen Funktion ergänzt. Das sind genau die konstanten Funktionen.

Beispiel: $e^z = e^z e^{iy} = e^z \cos y + i e^z \sin y$

$$\max_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2\pi}} e^x \cos y = e \quad \max_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2\pi}} |e^z| = \max_{-1 \leq x \leq 1} e^x = e$$

Beispiele zur Nullstellenordnung:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + - \dots \\ &= z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right) \end{aligned}$$

$\sin z$ hat in 0 eine *einfache* Nst.

$\sin z$ hat in 2π eine einfache Nst.

$\sin z$ hat in π eine einfache Nst.

$\sin' z = \cos z \neq 0$ bei $0, \pi, 2\pi$ etc. \Rightarrow alle reellen Nst. sind einfach!

Übung: $\sin z$ hat keine weiteren Nst.

8.4 Laurent-Reihen

$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$\frac{1}{z^2}$$

$$z = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z + 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots$$

Ziel: Ist $f : \{z : 0 < |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann hat f eine Darstellung $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$

Holomorphe Funktionen in Kreisringen

$$U = \{r < |z| < R\}$$

Betrachte $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{grüner Weg}} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R-\delta} \frac{f(z)}{z-w} dz}_{f_1(w)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r+\delta} \frac{f(z)}{z-w} dz}_{f_2(w)} \end{aligned}$$

sobald $r + \delta < |w| < R - \delta$

f_1 ist holomorph in $|w| < R - \delta$, für jedes δ , also holomorph auf $|w| < R$

f_2 ist holomorph in $|w| > r + \delta$, für jedes δ , also holomorph auf $|w| > r$.

Diese Zerlegung $f = f_1 + f_2$ heißt Laurent-Zerlegung.

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

Bei f_2 beachte: $\lim_{|w| \rightarrow \infty} f_2(w) = 0$, denn für $|z| = r + \delta$ ist $|w - z| \geq |w| - (r + \delta)$, also

$$\left| \frac{f(z)}{z-w} \right| \leq \frac{\max_{|z|=r+\delta} |f(z)|}{|w| - (r+\delta)} \rightarrow 0 \text{ mit } |w| \rightarrow \infty$$

Aber: $w \mapsto \frac{1}{w}$ bildet $|w| > r$ auf $|w| < \frac{1}{r}$ ab.

$f_2\left(\frac{1}{w}\right)$ lebt auf $|w| < \frac{1}{r}$, bei 0 Wert 0.

$$f_2\left(\frac{1}{w}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k \quad \text{auf } |w| < \frac{1}{r}$$

$$f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$\rightarrow f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{1}{z}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

$$a_k = \begin{cases} c_k & (k \geq 0) \\ b_k & (k < 0) \end{cases}$$

Diese Reihenentwicklungen heißen **Laurent-Reihen**.

Beispiel: $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ mit $r = 0$, $R = \infty$

(1)

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

(2)

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z} \text{ mit } r = 0, R = 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{l-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overbrace{\sum_{l-k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}}^{\leq e} z^n$$

Definition: z_0 heißt Singularität von f , wenn f in $0 < |z - z_0| < r$ mit $r > 0$ holomorph ist. $\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1-z}$ hat Singularitäten in $z = 0$, $z = 1$. (Vornehm: "isolierte Singularitäten")

Zu jeder solchen Singularität hat f eine Laurententwicklung:

ist z_0 isolierte Singularität, dann setze $w = z - z_0$.

Dann wird $w = 0$ zur Singularität, bestimme Laurent in w .

d.h.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Sind z_0, z_1, z_2, \dots die Singularitäten von f , dann herrscht Konvergenz in $0 < |z - z_0| < R$ mit

$$R = \min_{j \geq 1} |z_0 - z_j|$$

Beispiel: $\frac{1}{\sin z}$ hat Singularitäten in $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Klassifikation von Singularitäten

Ist z_0 isolierte Singularität der holomorphen Funktion f mit Laurent-Entwicklung

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, und sind ∞ viele der a_1, a_2, a_3, \dots von 0 verschieden, dann heißt z_0 **wesentliche** Singularität.

Gibt es $a_{-k} \neq 0$ ($k \in \mathbb{N}$), also $f(z) = a_{-N}(z - z_0)^{-N} + a_{1-N}(z - z_0)^{1-N} + \dots$ mit $a_{-N} \neq 0$, dann heißt z_0 **Pol** N -ter Ordnung.

Ist $a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann heißt z_0 **hebbare** Singularität.

Beispiele:

(1) $\frac{\sin z}{z}$ hat in $z_0 = 0$ isolierte Singularität

$$\frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Diese Sing. ist hebbbar.

(2) $\frac{z}{\sin z}$ hat in $z = 0$ ebenfalls hebbare Singularität, ist dort holomorph.

$$\Rightarrow \frac{z}{\sin z} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \text{ hat nach der Regel Konv-Radius } \pi.$$

Pole: $\frac{1}{z^N}$ ist Pol N -ter Ordnung.

Allgemeiner: $(z - z_0)^{-N}(a_{-N} + a_{1-N}(z - z_0) + a_{2-N}(z - z_0)^2 + \dots)$

”Polererkennung”: z_0 sei ein Pol von f . Dann gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0$$

Bei wesentlichen Singularitäten passiert was ”völlig” anderes:

Satz von Casorati-Weierstraß: ist z_0 wesentl. Sing. von f und $c \in \mathbb{C}$ beliebig, dann existiert $z_n \rightarrow z_0$ mit $f(z_n) \rightarrow c$

Übung: rechne das für $\exp(\frac{1}{z})$ bei $z_0 = 0$ von Hand nach.

Integrale um isolierte Singularitäten

0 sei isolierte Sing. für $f : \{0 < |z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für $0 < r < R$ betrachte

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} a_k \int_{|z|=r} z^k dz \\ &= \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z} = a_{-1} \end{aligned}$$

z^k ist holom. auf \mathbb{C} ($k \geq 0$)

z^k hat Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $k = -2, -3, -4, \dots$

Ist allgemeiner z_0 isolierte Singularität von f und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

die Laurententw., dann heißt

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \operatorname{Res}_{z=z_0} f$$

das Residuum von f in z_0 .

RESIDUENSATZ. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf isolierte Singularitäten.

Sei $\gamma : I \rightarrow U$ ein geschlossener Weg, dessen Inneres zu U gehört.

Auf dem Rand liege keine Sing. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0} \operatorname{Res}_{z_0} f$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z^2} \text{ hat Singularitäten in } z = \pm i \\ &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} \text{ Laurentreihe von } z=i \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{z+i} \right) = \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{2i} + b_1(z-i) + b_2(z-i) + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

$$\int_{-R}^R \frac{dt}{1+t^2} + \int_{\text{Halbkreis}} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^R \frac{dt}{1+t^2} + 0 \left(\frac{1}{R} \right)$$

Wiederholung: was ist das Residuum?

$f : \{0 < |z - z_0| < r\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\frac{1}{2}r} f(z) dz = a_{-1}$$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Sei f holomorph auf U bis auf endl. viele isolierte Singularitäten. Sei γ geschlossener Weg, dessen Inneres links liegt, und ganz zu U gehört. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \text{ im Inneren von } \gamma} \operatorname{Res}_{z=z_0} f$$

denn: wird Int-Weg wie in der Skizze ergänzt, wird das Integral 0 nach Cauchy. Das Integral über die roten Kreise, gegen die Uhr orientiert, ist $2\pi i \operatorname{Res}_{z_i} f$.

Methoden zur Berechnung des Residuums

- (i) Bestimme die Laurent-Entwicklung und lies a_{-1} ab.

Beispiel: $\frac{1}{z^2+1}$ hat Singularitäten in $\pm i$

$$f(z) \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$f(z)(z-i) = \frac{1}{z+i}$, holom. in i , also ist i ein Pol erster Ordnung

(allgemeiner: hat der Nenner eine Nst. n -ter Ordnung, dann handelt es sich stets um einen Pol n -ter Ordnung!)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} \\ &= \frac{1}{z-i} \left(\frac{1}{(z-i)(2i)} \right) \\ &= \frac{1}{z-i} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 + \frac{z-i}{2i}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i} \right)^k \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2i} \left(-\frac{1}{2i} \right) + \text{Terme, die } z-0 \text{ enthalten.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}}$$

- (ii) (für Polstellen - *nicht* für wesentliche Singularitäten!)

Gebrauch von Cauchy's Integralformel

$f(z)$ habe in z_0 einen **Pol** n -ter Ordnung.

Schreibe $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$. Dann ist g holomorph in z_0 , $g(z_0) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} dz \\ &= \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \text{ mit } n = m+1; m = n-1 \end{aligned}$$

$$g^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Beispiel: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
 $f(z) = \frac{1}{z-i}g(z)$ mit
 $g(z) = \frac{1}{z+i} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z} = g(i) = \frac{1}{2i}$

Genauso: $\operatorname{Res}_{-i} \frac{1}{1+z^2} = -\frac{1}{2i}$

Sätzchen (Rechenkontrolle). Ist $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen $P(z), Q(z)$, wobei $\deg Q \geq \deg P + 2$, dann ist

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Res} R = 0 \quad (\text{Vorsicht: falsch für } R(z) = \frac{1}{z})$$

Beweis: Q Polynom, hat also nur endl. viele Nst. z_1, \dots, z_r .

Nur dort gibt's Singularitäten! Wähle $\varrho > |z_j|$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} R(z) dz = \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}_{z_j} R$$

Aber $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \int_{|z|=\varrho} R(z) dz = 0$, denn $|R(z)| \leq C\varrho^{-2}$, und Lage des Kreises $2\pi\varrho$.

8.5 Integralauswertungen mit Residuensatz

(Fischer, Lieb, Funktionentheorie I; Anwendungen des Residuensatzes in der reellen Analysis)

Beispiel: Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 16}$$

Dazu integriere $f(z) = \frac{1}{z^4+16}$ über γ_R :

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{16+z^4} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{16+z^4} + \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{16+z^4} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^4}$$

Berechne noch das Residuum in $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}}$

$f(z) = \frac{1}{z^4+16}$ hat in z_1 einen Pol 1. Ordnung.

$$f(z) = \frac{1}{z-z_1} \frac{z-z_1}{z^4+16} = \frac{1}{z-z_1} g(z)$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} f = g(z_1) \text{ mit } g(z_1) = \frac{z - z_1}{z^4 + 16} \Big|_{z=z_1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{(z^4 + 16)(z_1^4 + 16)}$$

$$\frac{1}{\frac{d}{dz} |_{z=z_1} (z^4 + 16)} = \frac{1}{4z_1^3}$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} = \frac{1}{4z_2^3}$$

Allgemeines Prinzip: Sei $R(x) = P(x)/Q(x)$ eine rationale Funktion: $\deg Q \geq (\deg P) + 2$.

Auf \mathbb{R} sei $Q(x) \neq 0$.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res} R(z)$$

Tipp: hat R viele Pole in $\operatorname{Im} z > 0$, aber wenige in $\operatorname{Im} z < 0$, dann benutze $\sum_{\text{alle}} \operatorname{Res} = 0$.

Trigonometrische Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sin^2 x} dx = ?$$

Allgemeiner sei $R(x, y)$ eine *rationale* Funktion in zwei Variablen,

z.B. $R(x, y) = \frac{xy - y^2 - x^2}{1 + x + y}$. Gesucht ist $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

$F(z) = R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))$. Dies ist rationale Funktion in z .

$$\int_{|z|=1} F(z) \frac{dz}{z} \underset{z=e^{it}}{=} i \int_0^{2\pi} F(e^{it}) dt = i \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right) dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

SATZ. Hat die Funktion $F(z) = R(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))$ auf $|z| = 1$ keine Singularitäten, dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{|z| < 1} \operatorname{Res} \frac{F(z)}{z}$$

Beispiel: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\sin^2 t} dt$; $R(x, y) = \frac{1}{4+y^2}$

$$F(z) = \frac{1}{4 + \left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{z}$$

bestimme jetzt *Pole*, dann ergibt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sin^2 t} dt = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(1) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

(Fourier-Transfo: f)

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dx$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{-2\pi i t x} dx = \frac{e^{-2\pi i t x}}{-2\pi i x} \Big|_{t=-1}^{t=1} = \frac{e^{-2\pi i x} - e^{2\pi i x}}{-2\pi i x}$$

Erinnerung: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

HM1:

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{\text{part. Integration}} \dots \int \frac{\cos t}{t^2} dt \text{ ex.}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ ex. als uneigentliches Integral}$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad z = x + iy, |e^{iz}| = e^{-y}$$

$$|\sin z| > \frac{1}{10} e^{|\operatorname{Im} z|} \text{ für } |y| > 1$$

Versuche, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$ zu berechnen. Gibt's gar nicht!

$$\int_{\gamma_{\epsilon, R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

1. Schritt: Ist γ_1 der Halbkreis auf $|z| = R$, dann gilt

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

Für $z = x + iy$ mit $0 < y < \sqrt{R}$ ist die Länge des Abschnitts auf dem Halbkreis: $\leq 3\sqrt{R}$
 $|\frac{e^{iz}}{z}| = \frac{|e^{ix-e^{-y}}|}{R} = \frac{e^{-y}}{R} \leq \frac{1}{R}$. Also ist das Integral über die Teile von $|z| = R$ mit $y < \sqrt{R}$
höchstens $3\sqrt{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{3}{\sqrt{R}} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$

Auf dem Teil mit $y > \sqrt{R}$ ist $|\frac{e^{iz}}{z}| \leq \frac{e^{-y}}{R} \leq \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R}$,
die Länge des Weges ist $\leq \pi R$,
das Integral ist also $\leq (\pi R) \frac{e^{-\sqrt{R}}}{R} = e^{-\sqrt{R}} \pi \rightarrow 0$

Integral über den kleinen Halbkreis: $|z| = \varepsilon e^{i\varphi} \quad (0 < \varphi < \pi)$

$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z)$ mit $h(z)$ holomorph auf \mathbb{C}

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\substack{|z|=\varepsilon \\ \text{Im } z > 0}} \ln(z) dz = 0, \text{ denn } \left| \int \right| \leq \pi \varepsilon \max_{|z|=\varepsilon} |h(z)| \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

$$\rightarrow \int_{\substack{|z|=\varepsilon \\ \text{Im } z > 0}} \frac{dz}{z} = \int_0^\pi \frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}} d\varphi = \pi i \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{|z|=\varepsilon \\ \text{Im } z > 0}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i$$

Wähle Imaginärteil:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi}$$

Tipp: lies Fischer-Lieb, Anwendungen des Residuensatzes!

(2) Wie findet man Nullstellen von komplexen Funktionen?

$$\sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} = p_N(x)$$

Problem: kein Zwischenwertsatz!

”Nullstellenzählendes Integral”

$f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Menge U .

Es sei $f(z_0) = 0$, Nullstelle N -ter Ordnung.

$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^N g(z)$; g ist holomorph, $g(z_0) \neq 0$.

Betrachte $\frac{f'(z)}{f(z)}$

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ hat in z_0 einen Pol 1. Ordnung, Res. ist N

Da $\frac{f'}{f}$ an allen Stellen mit $f(z) \neq 0$ ohnehin holomorph, gilt:

SATZ (Nullstellenzähler). Sei γ ein geschlossener Weg, dessen Inneres ganz in U liegt, auf dem Weg sei keine Nst. der holomorphen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Anzahl } \{z_0 \text{ im Inneren von } \gamma \text{ mit } f(z_0) = 0, \text{ mit Vielfachheit gezählt}\}$$

$$\begin{aligned} f &= (z - z_0)^N g, & f'(z) &= N(z - z_0)^{N-1} g(z) + (z - z_0)^N g'(z) \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{N(z - z_0)^{N-1} g(z) + (z - z_0)^N g'(z)}{(z - z_0)^N g(z)} = \frac{N}{z - z_0} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{holomorph}} \end{aligned}$$

Hat f in z_0 einen Pol $|N|$ -ter Ordnung, dann hat $\frac{f'}{f}$ wieder in z_0 einen Pol 1. Ordnung, $\text{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = -(\text{Polarordnung})$

SATZ. Wie im vorigem Satz sei γ geschlossen. Im Inneren von γ sei f holomorph bis auf endlich viele Polstellen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} dz &= \text{Anzahl } \{\text{Nullst. im Inneren (mit Vielfachheit)}\} \\ &\quad - \text{Anzahl } \{\text{Polstellen im Inneren mit Vielfachheit}\} \end{aligned}$$

(macht numerisches Auffinden von Null- und Polstellen möglich)

Beispiel: nochmal Fundamentalsatz der Algebra

p Polynom, $\text{Grad}(p) = n \geq 1$.

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (a_j \in \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \frac{p'(z)}{p(z)} &= \frac{na_n z^{n-1} + \dots + a_1}{a_n z^n + \dots + a_0} = \frac{nz^{-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots} \\ &= \frac{n}{z} + \text{Terme in } \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Anzahl (Nst. von } p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|z|=R \\ R \text{ groß}}} \frac{p'}{p} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = n$$

(3) **Partialbruchentwicklung**

p, q Polynome; $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{x_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{A'_{x_1}}{(x-x_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{A_{x_1}^{(n_1-1)}}{(x-x_1)} +$ dasselbe in x_2 etc... + Polynom

$$q(x) = c(x-x_1)^{n_1} \dots (x-x_r)^{n_r}$$

$g(z) = \pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ hat Pole 1. Ordnung an allen ganzen Zahlen;

$\operatorname{Res}_{z=0} g = 1$ wegen $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$)

$z g(z) = z \frac{\operatorname{Res}}{z} + z(\text{holomorph})$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z g(z) = \operatorname{Res}_{z=0} g$$

SATZ.

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)$$

Diese Formel heißt Partialbruchentwicklung des Cotangens.

Stets kann eine Funktion mit abzählbar vielen Polen auf \mathbb{C} in eine Reihe "über die Polstellen" entwickelt werden, die jeweils den "negativen Anteil" der Laurentreihe enthält.

Konvergenzfragen heikel.

Idee: Wähle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fest. Betrachte

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot \pi w \quad \text{Pole: } w = n \in \mathbb{Z}. \text{ Für } n \neq 0$$

hat der Pol 1. Ordnung, Res. dort $\frac{1}{z-n} \cdot \frac{z}{n}$, bei $n = 0$ Pol 2. Ordnung, Res dort $\frac{1}{z}$. Pol 1. Ordnung in $w = z$, Res dort $\pi \cot \pi z$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{Q_N} f(w) dw = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) - \pi \cot \pi z$$

Euler'sche Formeln: $|\operatorname{Im} z| > 1 \Rightarrow |\pi \cot \pi z| \leq 10$.

$\int_{Q_N} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), weil f wie $\frac{1}{N^2}$ fällt.

9 Differentialgleichungen

9.1 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Rückblick: bisher waren alle Dgl lineare und hatten konstante Koeff., z.B. Systeme 1. Ordnung.

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) \quad (\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

(\rightarrow Matrizenexponentialfunktion)

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(t) \quad a_j \in \mathbb{R}$$

Lineare Dgl-(Systeme) sind gegeben durch

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) \text{ mit zeitabhg. Matrix } A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

oder

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)}(t) \text{ mit Fkt. } a_j(t)$$

Oft sind $a_j(t)$, $A(t)$ "sehr glatt", analytisch (d.h. Re von holom. Fkt).

(zu) simples Beispiel: $p(z)$ sei eine ganze Funktion. Gesucht ist eine holomorphe Funktion $w(z)$ mit

$$w'(z) = p(z)w(z)$$

Wenn es eine Lösung $w(z)$ gibt, dann schreibe

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n. \text{ Andererseits ist } p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \text{ mit Konv.-Radius } \infty.$$

$$\begin{aligned} w'(z) &= p(z)w(z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} w_l z^l = \sum_{k,l=0}^{\infty} p_k w_l z^{k+l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)w_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} p_k w_l \right) z^n \end{aligned}$$

LEMMA 1. Ist $p(z)$ eine ganze Funktion und $w(z)$ holomorph in einer Umgebung von 0 mit $w'(z) = p(z)w(z)$, dann gilt

$$(n+1)w_{n+1} = \sum_{k=0}^n p_k w_{n-k} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad (*)$$

Also: ist $w(0) = w_0$ vorgegeben, dann sind durch (*) alle w_1 eindeutig bestimmt, denn

$$w_1 = p_0 w_0; \quad 2w_2 = p_0 w_1 + p_1 w_0 \text{ etc.}$$

Man stellt fest, dass sogar gilt:

SATZ 1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$ und $\{|z| < R\} \subset U$. Sei p holomorph auf U .

Sei $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Diese hat Konv.-Radius mindestens R . Dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ genau eine auf U holomorphe Funktion $w(z)$ mit $w(0) = w_0$ und $w' = pw$.

Die Koeff. von w bei Entwicklung um 0 sind dabei durch (*) gegeben.

denn: entwickle $p(z)$ um 0; Konv.-Radius ist mind. R . \Rightarrow Koeff. von w liegen fest.

Probleme: zeige, dass die Reihe $\sum w_n z^n$ auf $|z| < R$ konvergiert. (ok, aber mühsam)

Nach Satz 1 bilden die Lösungen von $w' = pw$ einen 1-dim. VR über \mathbb{C} .

Beispiel 1: gesucht ist $w(z)$ mit $w'(z) = w(z)$ und $w(0) = 1$.

Nach Satz 1: es gibt genau eine Lösung $w(z)$, automatisch eine **ganze** Funktion $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$

$$(n+1)w_{n+1} \stackrel{(*)}{=} w_n \quad (\text{denn } 1 = 1 \cdot z^0 + 0z + 0z^2 + \dots)$$

$$w_0 = 1, \quad w_1 = w_0 = 1, \quad w_2 = \frac{1}{2}w_1, \quad w_n = \frac{1}{n!} \text{ (Induktion!)}$$

Die gesuchte Lösung ist also von der Form

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Allgemeiner: ist w_0 beliebig, dann wird $w(z) = w_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$

Dasselbe für Dgls zweiter Ordnung:

$U \subset \mathbb{C}$ offen, zshg; $p, q : U \rightarrow \mathbb{C}$ seien holomorph. $z_0 \in U$. Die Kreisscheibe $|z - z_0| < R$ liege ganz in U .

Gesucht sind *alle* holomorphen Lösungen $w : \{z : |z - z_0| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$w''(z) = p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$$

Ansatz: o.B.d.A. $z_0 = 0$. Auf $|z| < R$ konvergieren

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n; \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n$$

Wenn es eine Lsg. w gibt, die holomorph ist, dann

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$$

$$\begin{aligned} w'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1}, \quad w''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) w_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) w_{n+2} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) w_{n+2} z^n + \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{l=1}^{\infty} l w_l z^{l-1} + \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \sum_{l=0}^{\infty} w_l z^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) w_{n+2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n+1} p_k l w_l \right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=n} q_k w_l \right) z^n \\ &\quad - (n+2)(n+1) w_{n+2} \\ &= \sum_{k+l=n+1} p_k l w_l + \sum_{k+l=n} q_k w_l \quad (**) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Rekursive sind alle w_n durch w_0, w_1 festgelegt.

Die Reihe für w konvergiert wieder *mindestens* auf $|z| < R$.

SATZ 2. Seien p, q holomorph auf $|z| < R$, $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es genau eine Lösung $w : \{|z| < R\} \rightarrow \mathbb{C}$ der Dgl. $w'' + pw' + qw = 0$ mit $w(0) = w_0$, $w'(0) = w_1$. Die Taylorreihe von w um 0 ist durch $(**)$ bestimmt.

Insbesondere hat $w'' + pw' + qw = 0$ einen 2-dim. Lösungsraum über \mathbb{C} . Eine Basis davon heißt Fundamentalsystem.

Seien w, \tilde{w} zwei Lösungen der Dgl. Dann betrachte

$$\det \begin{pmatrix} w(z) & \tilde{w}(z) \\ w'(z) & \tilde{w}'(z) \end{pmatrix} = W(z)$$

heißt "Wronski-Determinante". Diese erkennt Fundamentalsysteme!

Allgemeiner hat eine Dgl $w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \dots + p_n(z)w(z) = 0$ mit in $|z| < R$ holomorphen Koeff. $p_j(z)$ stets einen n -dim. Lösungsraum holomorpher Fkt.; diese können ebenfalls über den Potenzreihenansatz aufgefunden werden!

Weiterführung:

Gegeben: partielle Dgl für $u : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\Delta u = u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu(x, y, z, t)$$

(Wellengleichung: $b = c = 0$, Wärmeleitung: $a = c = 0$)

Angenommen, wir suchen Lösungen, die zylindersymmetrisch sind. Dann benutze "Zylinderkoordinaten"

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

"Neue Fkt"

$$v(r, \varphi, z) := u(x, y, z)$$

mit

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

Separationsansatz: $v = F(r)G(\varphi)H(z)K(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{rF(r)} \frac{d}{dr} (rF'(r)) + \frac{1}{r^2 G(\varphi)} G''(\varphi) + \frac{1}{H(z)} H''(z) - c = \frac{1}{K(t)} (aK'' + bK')$$

linke Seite enthält t nicht! Also rechte Seite konstant:

$$K''(t) + bK'(t) = dK(t); \quad d \text{ geeignet}$$

Lineare Dgl 2. Ordnung, *konstante* Koeffizienten \Rightarrow HM 1 $\frac{1}{2}$

Genauso: $H''(z) = \alpha H(z)$, ebenfalls einfach zu lösen.

$$\text{Jetzt bleibt } \frac{1}{rF(r)} \frac{d}{dr} (rF'(r)) = -\frac{G''(\varphi)}{r^2 G(\varphi)} + C$$

Multipliziere mit $r^2 \Rightarrow G''(\varphi)/G(\varphi)$ konstant \Rightarrow Dgl 2. Ordnung

Zurück bleibt für geeignetes $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$

$$r^2 F''(r) + rF'(r) + \beta F(r) = \gamma r^2 F(r)$$

Elementar lösbare Fälle: $\gamma = 0$. Setze $\beta = -\nu^2 \neq 0$

Lösungen sind $r^{\pm\nu}$, oder, falls $\gamma = \beta = 0 : \equiv 1$, $\log r$

Falls $\gamma \neq 0$, setze

$$w(z) = \dots$$

...

9.2 Bessel-Differentialgleichung

Bessel-Dgl: $z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \nu^2)w(z) = 0$

$$\Leftrightarrow w''(z) + \frac{1}{z}w'(z) + \frac{z^2 - \nu^2}{z^2}w(z) = 0$$

Ist U offen, $0 \notin U$, U sternförmig, dann löst Potenzreihenansatz diese Dgl, es gibt 2-dim. Lösungsraum

Seien p, q in $0 < |z - z_0| < R$ holomorp. In z_0 habe p einen Pol höchstens 1. Ordnung und q einen Pol höchstens 2. Ordnung.

Dann heißt z_0 schwache Singularität der Dgl $w'' + pw' + qw = 0$

Beispiel: Bessel-Dgl hat in $z_0 = 0$ eine schwache Singularität.

Es genügt: Lösung in der Umgebung *einer* schwachen Singularität zu verstehen! Von jetzt an: $z_0 = 0$ schwache Singularität.

Allgemeine komplexe Potenz: $\varrho \in \mathbb{C}$ Was soll z^ϱ heißen?

$$z^\varrho = e^{\varrho \log z} = \exp(\varrho \log z) \text{ mit } \log z = \log |z| + i \arg z$$

Dabei sei für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ das Argument fixiert über $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$.
(Warnung: der Halbstrahl $\{re^{i\alpha} : r \geq 0\}$ fehlt in der Def-Menge!)

$$z^\varrho = \exp(\varrho(\log |z| + i \arg z)) =$$

grün: $\arg z = \beta$, blau: $\arg z = \beta + 2\pi$

Unterschied zwischen blau (z^ϱ) und grün (z^ϱ) ist Faktor $\exp(2\pi i \varrho)$

z^ϱ ist blau = grün auf dem roten Halbstrahl $\Leftrightarrow \varrho \in \mathbb{Z}$

Löse die Dgl $w'' + pw' + qw = 0$ durch Ansatz

$$w(z) = z^\varrho \nu(z) \text{ mit } \nu(z) \text{ holomorph bei } 0$$

"Verallgemeinerter Potenzreihenansatz" p hat in 0 Pol ≤ 1 . Ordnung;

$$p(z) = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j; \quad q(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$$

Lösungsansatz: $w(z) = z^\varrho v(z)$; $v(z) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j z^j$

$$\begin{aligned} z^2 w''(z) + z^2 p(z) w'(z) + z^2 q(z) w(z) &= 0 \\ = z^2 w''(z) + z^\varrho \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \left(p \sum v_j z^j + j v_j z^j \right) + z^\varrho \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \sum_{l=0}^{\infty} v_l z^l &= 0 \end{aligned}$$

$$z w'(z) = z(z^\varrho v)' = z(\varrho z^{\varrho-1} v + z^\varrho v') = \varrho z^\varrho v + z^{\varrho+1} v'$$

mit $v'(z) = \sum n z^{n-1} v_n$

$$(n + \varrho)(n + \varrho - 1)v_n + \sum_{k+l=n} (k + p)p_l v_k + \sum_{k+l=n} q_k v_l$$

$v_0[\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0] = 0$ (Rekursion für $n = 0$)

$v_0 = 0$ ist *keine* gute Idee, denn $w(z) = z^\varrho v(z)$, $v_0 = 0$ hätte v in z_0 Nst. $\Rightarrow \varrho \mapsto \varrho + 1$
 $v_0 \neq 0$

Wähle also p so, dass $\boxed{\varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0 = 0}$

Diese Gleichung heißt determinierende Gleichung der schwachen Singularität, die beiden komplexen Lösungen heißen **Charakteristiken**.

Sei $\Phi(\varrho) = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0$. Die Rekursionsformel für v_n hat die Form $\Phi(n + \varrho)v_n =$ Lin.-Kombi. der v_0, \dots, v_{n-1} .

Ist also ϱ Charakteristik und $\Phi(n + \varrho) \neq 0$ für $n \geq 1$, dann sind die v_n bestimmt, es ergibt sich eine Lösung

$$w(z) = z^\varrho v(z)$$

Seien jetzt ϱ_1, ϱ_2 die beiden Charakteristiken.

Ist $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{Z}$, dann gibt es nach dem Rezept zwei Lsg. $w_j = z^{\varrho_j} v_j(z)$

SATZ 1. Ist $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{Z}$, dann gibt es ein Fundamentalsystem $w_j = z^{\varrho_j} v_j$ mit in 0 holomorphen Fkt. v_1, v_2

Rückblick: Potenzreihenansatz

$$w^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j(z) w^{(j)}(z)$$

homogene lineare Dgl k -ter Ordnung.

Dabei seien $p_j(z)$ holomorph in $0 < |z - z_0| < R$

Schreibe $p_j(z)$ als Laurent-Reihe;

Ansatz:

$$w(z) = z^\ell \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Vorteile:

a priori-Fehlerschätzung (aus der Potenzreihe!)

gute Numerik!

Nachteil:

nur für lineare Gleichungen!

nur für $p_j(z)$ holomorph.

Bessel-Dgl (Spezialfall)

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$$

$$w'' + \frac{w'}{z} + \left(1 - \left(\frac{\nu}{z}\right)^2\right) w = 0$$

(hier ist $\nu \in \mathbb{C}$ gegeben)

(Bsp. Anwendung: schwingende kreisförmige Membran, radiale Komponente)

$z = 0$ ist schwach singulär; Charakteristiken = $\pm \nu$.

Also *muss* ein Ansatz

$$z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$$

auf eine Lösung führen;

$a_0 = 1$. Koeff-Vergleich:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n n! (\nu + 1)(\nu + 2) \dots (\nu + n)}$$

(leeres Produkt = 1); $a_{2n+1} = 0$.

So wird $f = f_\nu$ zu einer Lsg. von der Bessel-Dgl.

Dann löst auch $f - \nu(z)$ die Bessel-Dgl.

SATZ. Ist $\nu \notin \mathbb{Z}$, dann sind $f_\nu, f_{-\nu}$ ein Fundamentalsystem (Basis des Lösungsraums).

($f_\nu, f_{-\nu}$ sind bis einen Faktor die "Bessel-Fkt. 1. Art; Literatur $J_\nu, J_{-\nu}$)

9.3 Gewöhnliche DGL und dynamische Systeme.

Was ist eine Dgl?

$$(*) F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0 \quad (\text{kürzer: } F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0)$$

heißt gewöhnliche Dgl k -ter Ordnung; eine *Lösung* ist eine k -mal diffb. Fkt. $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y(x), \dots, y^{(k)}(x)) \in U \forall x \in I$, und es gilt $(*)$ auf I .

In der Praxis ist F (mindestens) stetig, i.a. sogar diffbar. Mit Satz über implizite Fkt. löse auf:

$$y^{(k)}(x) = G(x, y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

heißt **explizite** Dgl k -ter Ordnung.

Was ist ein dynamisches System?

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$; $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ VF, stetig.

Eine **Integralkurve** zu v ist ein diffbarer Weg $\varphi : I \rightarrow U$ mit $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$

Allgemeiner: ist das VF abhängig von der *Zeit*, heißt dies **dynamisches System**. Genauer: sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $v_t(\vec{x}) = F(t, \vec{x})$ für jedes $t \in I$ ein VF. Ein gewöhnliches Dgl-System 1. Ordnung ist dann (Steno: $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$); genauer: $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, diffbar mit $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$

Vorsicht: i.a. ist die Lösung keineswegs eindeutig zu gegebenem Anfangswert $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$.

Jede gewöhnliche Dgl k -ter Ordnung kann als dynamisches System interpretiert werden.

$$\text{denn: } y''(t) = G(t, y(t), y'(t)) \quad x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t)$$

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = G(t, x_1(t), x_2(t))$$

allgemeiner" Dgls k -ter Ordnung werden zu dynamischem System auf \mathbb{R}^k

Hilfe für Eindeutigkeit:

Eine Abbildung $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$ wie in der Def. dyn. Systeme heißt Lipschitz-stetig zur Konstanten L , wenn gilt

$$\|F(t, \vec{x}_1) - F(t, \vec{x}_2)\| \leq L \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$$

für alle $t \in I$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$

Dabei ist stets $\|(z_1, \dots, z_n)\| = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$

SATZ 1 (Existenz und Eindeutigkeit). Sei F Lipschitz-stetig, $t_0 \in I, \vec{x}_0$. Dann gibt es $J \subset I$ offen, $t_0 \in J$ und eine Lösung $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$. Diese Lösung ist durch t_0, \vec{x}_0 eindeutig festgelegt.

Konstruktiver Zugang zur Lösung des dynamischen Systems:

Picard-Lindelöf-Verfahren

Für Wege $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ war $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$

Analog schreibe:

$$\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau := \left(\int_{t_0}^t \varphi_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_0}^t \varphi_n(\tau) d\tau \right)$$

$$\varphi(t) = \int \varphi'(t) = \int F(t, \varphi(t)).$$

Beginne mit $\varphi_0(\tau) = \vec{x}_0$. Definiere rekursiv

$$\varphi_k(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau$$

Für $|t - t_0|$ klein ist das eine kontrahierende Abbildung; Banach: $\varphi_k(t)$ konv. gleichm.; Grenzfunktion ist die Lösung.

Beispiel: gesucht ist Fkt $y(t)$ mit $y'(t) = y(t), y(0) = a$

(wissen natürl. schon $y(t) = ae^t$)

$$\varphi_0(t) = a$$

$$\varphi_1(t) = a + \int_0^t a d\tau = a + at$$

$$\varphi_2(t) = a + \int_0^t (a + a\tau) d\tau = a(1 + t + \frac{1}{2}t^2)$$

⋮

$$\varphi_k(t) = a \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} t^l$$

Übung: löse: $y'' = (\sin t)y$

Wiederholung:

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall (Vorrat für die Zeit; oft $I = \mathbb{R}$)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen; $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Abb. (Anschauung: für jedes $t \in I$ ist $\vec{v}_t : \vec{x} \mapsto F(t, \vec{x})$ ein

VF auf U)

dynamisches System: $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$.

(lokale) **Lösung:** ist $\varphi : J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$, diffb., $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$

Wir suchen zu physikalischer Modellierung möglichst *eindeutige* Lösung jedes **Anfangswertproblems** (AWP): $\vec{x}_0 \in U$, $t_0 \in I$: gesucht ist *lokale* Lösung φ mit $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$; diese sollte sogar auf ganz I existieren.

Ist das *nicht so*, dann ist meist das Modell ungeeignet.

Ein F wie in der Def. des dyn. Systems heißt Lipschitz-stetig (zur Konstanten L), wenn

$$\|F(t, \vec{x}_1) - F(t, \vec{x}_2)\| \leq L \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\| \quad \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U, \forall t \in I$$

SATZ 1. Ist F Lipschitz-stetig, dann gibt es genau eine lokale Lösung jedes AWP.

Def.: ein dynamisches System heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jedem $t_0 \in I$ und zu jeden $\vec{x}_0 \in U$ Umgebungen $|t - t_0| \leq \delta$, $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \eta$ mit $\delta > 0$, $\eta > 0$ gibt, so dass $F(t, \vec{x})$ für diese t und \vec{x} Lipschitz-stetig ist.

Satz 1 bleibt richtig bei lokaler Lipschitz-Stetigkeit.

SATZ 2. Ist $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, dann ist F lokal Lipschitz-stetig.

(denn: mehrdim. Taylor!)

Beispiel: $y' = (\sin t)y$. Gesucht: Lösungen $y'(t)$

Bemerkung: die Lösungskurven schneiden sich nicht, sobald das dyn. System lokal L-stetig ist.

SATZ 3 (maximale Lösungen). Sei $F : I \times U$ lokal Lipschitz-stetig. Dann kann jede Lösung von $\vec{x}' = F(t, \vec{x})$ zu einer **maximalen** fortgesetzt werden:

entweder ex. die Lösung auf ganz I , oder es gibt ein maximales Teilintervall $J \subset I$; auf dem die Lösung def. ist; dann erreicht die Lösung den Rand von U .

”Lösungen laufen von Rand zu Rand”

Euler-Peano-Polygonzugverfahren

Betrachte eine gewisse Dgl 1. Ordnung: $y' = f(x, y)$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Betrachte dazu Richtungsfeld auf U :

Zu einem Startpunkt (x_0, y_0) und $h > 0$ konstruiere einen **Polygonzug:** auf $[x_0, x_0 + h]$ nimm die Strecke durch (x_0, y_0) mit Steigung $f(x_0, y_0)$. Sei $x_1 = x_0 + h$; (x_1, y_1) sei der Endpunkt

dieser Strecke. Wiederhole mit (x_1, y_1) als Startpunkt.

\Rightarrow Stetige Funktion $p(h, x) : [x_0, \tilde{x}(h)] \rightarrow \mathbb{R}$

SATZ 4. $\lim_{h \rightarrow 0} p(h, x)$ existiert und löst das AWP $y(x_0) = y_0$.

Achtung: in Satz 4 ist von Eindeutigkeit *nicht* die Rede (i.a. sogar falsch!)

9.4 Lineare Differentialgleichungen

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x} + \vec{b} \text{ mit } a \in \mathbb{K}^{n \times n}, \vec{b} \in \mathbb{K}^n = \mathbb{C} \text{ oder } \mathbb{R}$$

wurde in HM2 behandelt. Jetzt seien $\vec{b} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ "zeitabhängig".

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

"lineares Dgl-System, lineares dyn. System.

Beispiel: $x'(t) = (\sin t)x(t)$, lineare Dgl, $n = 1$, $b(t) = 0$.

Ist $\vec{b}(t) \equiv 0$, dann heißt das System homogen, sonst inhomogen.

SATZ 1. Seien $I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $\vec{b} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) stetig. Sei $t_0 \in I$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann hat das AWP: $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ genau eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$.

$$F(t, \vec{x}) = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t)$$

$$\|F(t, \vec{x}_1) - F(t, \vec{x}_2)\| = \|A(t)(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\| \leq \|A(t)\| \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|$$

\Rightarrow lokal Lipschitz-stetig. Wende Satz 3, Paragraf 3 an!

Wiederholung:

Lineare dynamische Systeme: $I \subset \mathbb{R}$ "Zeitintervall", $A(t) \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\vec{b}(t) \in \mathbb{K}^n$; stetig in t .

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

SATZ 1. Lösungen leben auf ganz I .

(x) heißt homogen, wenn $\vec{b}(t) \equiv 0 \forall t \in I$.

Sonst inhomogen!

$$L = \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n; \varphi'(t) = A(t)\varphi(t)\}$$

Lösungsmenge des homogenen Systems $\vec{x}' = A\vec{x}$

SATZ 2. L ist \mathbb{K} -VR, $\dim L = n$; für jedes $t_0 \in I$ ist die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n; \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

linear und bijektiv

denn: $\varphi, \psi \in L \quad (\varphi - \psi)' = \varphi' - \psi' = A\varphi - A\psi = A(\varphi - \psi)$

$\Rightarrow \varphi - \psi \in L$ Genauso: für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $\alpha\varphi \in L$

$\Rightarrow L$ ist \mathbb{K} -VR.

$\varphi \mapsto \varphi(t_0)$ ist linear (klar).

Zu $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ ist gesucht: $\varphi \in L$ mit $\varphi(t_0) = \vec{x}_0$.

Da AWP für lin. Systeme mit stg. Koeff. genau eine Lösung hat, ist $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$ bijektiv.

Def.: ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von L , dann fasse $\varphi_j(t)$ als n -Spalten auf, bilde daraus Matrix

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) =: \Phi(t) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Wir nennen jede solide Basis oder auch $\Phi(t)$ **Fundamentalsystem**.

Die Matrix Φ genügt dann $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$

Ist $\varphi \in L$, dann $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$; $(c_1, \dots, c_n) = \vec{c}$

$\varphi = \Phi\vec{c}$ (durchläuft alle Lsg, wenn $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$)

Physikalische Aufgabe: wann ist $\det \Phi(t)$ konstant für *alle* Fundamentalsysteme? (Volumenkonstante Zeitentwicklung, z.B. wenn Strömungen modelliert werden sollen, die konstanten Druck haben).

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}; \quad a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{Spur } A$$

SATZ 3 (Liouville, ≈ 1850). Sei Φ ein F-System für $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$.

Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = (\text{Spur } A(t)) \det \Phi(t)$$

Folgerung: $\det \Phi(t)$ konstant \Leftrightarrow Spur $A(t) = 0 \forall t \in I$

(Volumentreue Zeitentwicklung kann an Spur $A(t)$ abgelesen werden!)

Bew. leicht, wenn man $\det \Phi(t)$ zu diff. weiß!

Bilde: $f(t_1, \dots, t_n) = \det(\varphi_1(t_1), \varphi_2(t_2), \dots, \varphi_n(t_n))$

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = \det \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}, \varphi_2(t_2), \dots, \varphi_n(t_n) \right); \quad \frac{d}{dt} f(t, \dots, t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi(t) &= \frac{d}{dt} f(t, \dots, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_i}(t, \dots, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{i-1}(t), \varphi'_i(t), \varphi'_{i+1}(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{aligned}$$

Jetzt rechne Satz 3 zur Übung nach!

$\det \Phi(t)$ für F-System heißt oft "Wronski-Determinante"

Lösen inhomogener System: $\vec{x}' = A\vec{x}$ habe F-System Φ ; $A(t)$, $\vec{b}(t) \in \mathbb{K}^n$ seien stetig in t .

Gesucht: $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$

Uns genügt jetzt *eine* Lösung des inhomogenen Systems, denn zu Lösungen \vec{y}_1, \vec{y}_2 von $\vec{y}'_j = A\vec{y}_j + \vec{b}$ löst $\vec{y}_1 - \vec{y}_2$ das homogene System $\vec{x}' = A\vec{x}$, und alle Lsg. von $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$ sind durch $L + \vec{y}_1$ gegeben.

SATZ 4 (Variation der Konstanten). Seien $A(t), \vec{b}(t)$ stetig, Φ F-System von $\vec{x}' = A\vec{x}$. Dann löst

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c}(t) \quad \text{und} \quad \vec{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s) ds$$

denn:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= (\Phi(t)\vec{c}(t))' = \Phi'(t)\vec{c}(t) + \Phi(t)\vec{c}'(t) \\ &= A\Phi(t)\vec{c}(t) + \Phi(t)\Phi(t)^{-1}\vec{b}(t) \\ &= A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \end{aligned}$$

9.5 Zum Verlauf der Integralkurven

Ziel: qualitativer Verlauf der Lösung eines AWP, *ohne* die Lösung zu berechnen.

”Erste Integrale”. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, Gebiet, $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld. Gesucht sind Integralkurven $\varphi : I \rightarrow U$, $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$

Def.: eine stetig diffb. Funktion $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\partial_v E = 0$ auf U (Richtungsableitung von E in Richtung v) heißt **Erstes Integral** von v .

Beispiel: \mathbb{R}^2 , Rotationsfeld: $v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

$E(x, y) = x^2 + y^2$ ist Erstes Integral von diesem v .

SATZ 1. Integralkurven von v verlaufen in Niveaulinien $E = \text{const}$ eines Ersten Integrals.

Warum? z.z.: $E(\varphi(t)) = \text{const}$, also $\frac{d}{dt}E(\varphi(t)) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = v(\varphi(t)) &= \langle \nabla E(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \\ &= \langle \nabla E(\varphi(t)), v(\varphi(t)) \rangle \\ &= \text{Richtungsvektor in Richtung } v \text{ von } E \text{ bei } \varphi(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$v : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges VF. Gesucht: Integralkurven $\varphi : I \rightarrow U$ mit $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$

$$\boxed{\vec{x}' = v(\vec{x})}$$

Ein ”Erstes Integral” ist eine diffb. Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 = \partial_v F$ auf $U = \langle \nabla F, v \rangle$

SATZ 1. Jede Integralkurve von $\vec{x}' = v(\vec{x})$ verläuft in Niveaumengen $E = \text{const}$.

I.a. gibt es keine Methode, ein 1. Integral anzugeben. Aber: wird ein ”Erhaltungssatz” aus der Modellierung erwartet, dann sollte die Erhaltungsgröße ein Erstes Integral sein.

Bsp.: Energieerhaltung in der Physik.

Beispiel 1: Schwingungsgleichung: $U \subset \mathbb{R}^n$

$F : U \rightarrow \mathbb{R}$, stetig diffbar (Potenzial)

$$\boxed{\vec{x}''(t) = -\nabla F(\vec{x})} \quad (*)$$

$$\vec{y} = \vec{x}' : \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\nabla F(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$E(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 + F(\vec{x})$$

$$v(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -\nabla F(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{(\vec{x}, \vec{y})} E = \begin{pmatrix} \nabla F(\vec{x}) \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

E ist 1. Int. für $(*)$

Physik: E ist \sum aus kinetischer und potentieller Energie;

Satz 1 entspricht Energieerhaltung.

Beispiel 2: "mathematisches Pendel"

$x'' = -\sin x$ für eine Funktion x einer Veränderlichen

$$E(x, y = x') = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

Beispiel 3: Volterra-Lotka-Systeme. *Volterra (1860-1940), Lotka: Biologe*

Was ist Wachstumsrate? $\frac{x'}{x}$

Konstantes Wachstum: $\frac{x'}{x} = c \Leftrightarrow x' = cx$, Lösung $x(t) = \alpha e^{ct}$

Bei zwei "Beständen" $x(t)$ und $y(t)$ betrachte das System:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(y(t)); \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = -b(x(t))$$

Ein Volterra-Lotka-System ist gegeben durch:

$$x'(t) = a(y(t))x(t); \quad y'(t) = -b(x(t))y(t)$$

mit (mindestens) stetigen Funktionen $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Annahmen: a, b seien monoton fallend, a habe genau eine Nst. $\eta > 0$, b habe genau eine Nst $\nu > 0$

Lösungen raten: $y(t) = 0$ löse $x' = a(0)x$; $x(t) = e^{a(0)t}$

Folgerung: jede Lösung, die zu einem Zeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$ in $x > 0$, $y > 0$ ist, bleibt dort zu *allen* Zeiten!

Es gibt die Lösung $x(t) = \xi$, $y(t) = \eta$

Zur Begründung des Lösungsverlaufs:

Das System hat 1. Integral der Art

$$E(x, y) = F(x) + G(y)$$

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} a(y)x \\ -b(x)y \end{pmatrix}$$

$$0 = a(y)x F'(x) - b(x)y G'(y) = \partial_v E$$

$$F'(x) = -\frac{b(x)}{x}, \quad G'(y) = -\frac{a(y)}{y}$$

Wähle für F, G Stammfunktion von $-\frac{b(x)}{x}, -\frac{a(y)}{y}$

$$F(\xi) = G(\eta) = 0$$

Vorzeichen der Ableitungen von F und G ändert sich bei ξ, η

Wiederholung:

Math. Pendel

$$x'' + \sin x = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

"Erstes Integral": $\partial_v E(\vec{x}) = 0$

Ist E ein Erstes Int. für ein Dgl.-System $\vec{x}' = v(\vec{x})$, dann verlaufen die Lsg. in Niveauflächen $E = \text{const.}$; i.a. ist das $n - 1$ -dim Mannigfaltigkeit.

Lineare gedämpfte Pendel: $\mu > 0$ reell, "Dämpfungskonstante"

$$x'' + \mu x' + \sin x = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -\mu y - \sin x \end{pmatrix}$$

Verhalten von Lösungen am Rand des Zeit-Intervalls

Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges VF und $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ eine **maximale** Integralkurve dazu. I.a. wird $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$ nicht existieren.

SATZ 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stg. VF.

Sei $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow U$ eine max. Integralkurve der Dgl $\vec{x}' = v(x)$. Der Grenzwert $\vec{x}_0 \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$ existiere, es sei $\vec{x}_0 \in U$.

Dann gelten $\beta = \infty, v(\vec{x}_0) = \vec{0}$

(Deshalb haben $\vec{x} \in U$ mit $v(\vec{x}) = 0$ kritische Punkte des VF)

Folgerung: Ist v noch L-stetig, dann kurvt jede Lösung nach Satz 2 ewig um den kritischen Punkt herum.

Bew. Satz 2: $\beta = \infty$. Wenn nicht: $\beta_0 = \beta < \infty$.

”von Rand zu Rand”: jeder kompakte Teil von U wird verlassen, wenn $\beta_0 < \infty$.

Widerspruch zu $\lim_{t \rightarrow \beta_0} \varphi(t) \in U$. Für $v(\vec{x}_0)$ schreibe $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \varphi_j(t+1) - \varphi_j(t) &\stackrel{\text{MWS}}{=} \varphi'_j(\tau(t)); \quad t < \tau < t+1 \\ &= v_j(\varphi(\tau(t))) \end{aligned}$$

Jetzt $t \rightarrow \infty$. Also wegen $\varphi(t) \rightarrow \vec{x}_0$:

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v_j(\varphi(\tau(t))) = v_j(\vec{x}_0) \Rightarrow (\vec{x}_0) = 0$$

Definition: Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges VF mit $v(\vec{x}_0) = 0$ für ein $\vec{x}_0 \in U$. Gibt es zu jeder Umgebung $W_\epsilon = \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$ ein $\delta > 0$, so dass *jede* max. Integralkurve φ von $\vec{x}' = 0(\vec{x})$ mit $\varphi(0) \in W_\delta$ zu allen positiven Zeiten in W_ϵ verbleibt, dann heißt \vec{x}_0 Attraktor. Insbesondere ist dann $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \vec{x}_0$ für *jeden* Startwert $\varphi(0) \in W_\delta$

Beispiel: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C})

$\vec{x}' = A\vec{x}$; Lösungen: $\exp(tA)\vec{c}$, $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$.

Bausteine der Lsg: $t^k e^{\lambda t}$, $\lambda = \text{EW von } A$

SATZ 3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die komplexen EW, mit Vielfachheit aufgelistet. Gilt $\text{Re } \lambda_j < 0$ für *alle* $1 \leq j \leq n$, dann ist $\vec{0}$ ein Attraktor.

Beachte: $\text{Re } \lambda_j < 0 \Rightarrow \lambda_j \neq 0 \forall \text{ EW}$, $\det A \neq 0$, also ist $\vec{0}$ der **einzigste kritische Punkt**.

SATZ 4 (Poincaré-Ljapunow). Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diffb. VF und \vec{x}_0 sei ein kritischer Punkt. Ist $A = J_v(\vec{x}_0)$ und haben alle komplexen EW von A negativen Realteil, dann ist \vec{x}_0 ein Attraktor.

Wiederholung:

Gegeben sei ein stg. VF $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{x}_0 \in U$ mit $v(\vec{x}_0) = 0$ ($\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ ist also Lsg. des AWP $\vec{x}' = v(\vec{x})$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$).

Ein solcher **kritischer Punkte** heißt Attraktor, wenn:

(i) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit:

Ist $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \delta$, dann hat jede Integralkurve $\varphi' = v(\varphi)$ mit $\varphi(0) = \vec{x}$ zu allen Zeiten t höchstens $\|\varphi(t) - \vec{x}_0\| < \epsilon$
(dann lebt φ mindestens auf $[0, \infty)$)

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \vec{x}_0$ für alle φ und (i)

Bsp.: $v(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

Gilt nur (i), dann heißt \vec{x}_0 stabiler Punkt.

SATZ 4 (Poincare-Ljapunow). Sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig diffb. Vektorfeld und $\vec{x}_0 \in U$ ein kritischer Punkt. Sind alle Eigenwerte der $n \times n$ -Matrix $J_v(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right)$ negativ, dann ist \vec{x}_0 ein Attraktor.

Beispiel: gedämpftes "math." Pendel: $x'' + \mu x' + \sin x = 0$.

System dazu: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -\mu y - \sin x \end{pmatrix}$ mit $y = x'$

Ist L-stetig; Lösungen leben also auf \mathbb{R} . Kritische Punkte sind $y = 0$, $x = k\pi$. In $(0, 0)$ liegt ein Attraktor vor:

Funktionalmatrix von $\begin{pmatrix} y \\ -\mu y - \sin x \end{pmatrix}$ ist in $(0, 0)$ gegeben durch $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $-\frac{\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4} < 0$.

Beweisidee Satz 4: Wahl Koordinaten $\vec{x}_0 = 0$. Dann (Taylor)

$$v(\vec{x}) = A\vec{x} + R(\vec{x})\vec{x}$$

mit $A = J_v(\vec{x}_0)$, $R(\vec{x}) \rightarrow 0$ ($\vec{x} \rightarrow \vec{0}$).

Die Lösung des AWP $\vec{x}' = v(\vec{x})$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ ist eindeutig bestimmt; diese sei φ . Das "nahe" System $\vec{x}' = A\vec{x}$ mit derselben Anfangsbed. $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ hat $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$

Schreibe deshalb $\varphi(t) = e^{tA}\vec{z}(t)$ mit $\vec{z}(0) = \vec{x}_0$

Kurze Rechnung:

$$\vec{x}' = v(x) \Leftrightarrow \vec{z}' = e^{-At}R(\varphi(t))e^{At}\vec{z}$$

Direktes Abschätzen liefert $\varphi(t) \rightarrow \vec{0}$ ($t \mapsto \infty$) aus $R \rightarrow 0$.

9.6 Der Fluss eines Vektorfeldes

$x'(t) = x(t)$ hat Lösungen ce^t , $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
c &= x_1(0) & x_1(t) &= ce^t \\
c \pm \varepsilon &= x_2(0) & x_2(t) &= (c \pm \varepsilon)e^t \\
\Rightarrow x_2 - x_1 &= \pm \varepsilon e^t
\end{aligned}$$

Von jetzt an sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein *stetig diffb.* VF auf U .

Insbesondere haben AWP $\vec{x}' = v(\vec{x})$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ eindeutige **maximale** Lösungen.

Ziel: gegeben zwei AWP:

$$\vec{x}_1' = v(\vec{x}_1), \quad \vec{x}_1(0) = \vec{x}_{1,0},$$

$$\vec{x}_2' = v(\vec{x}_2), \quad \vec{x}_2(0) = \vec{x}_{2,0}$$

Schätze $\|\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)\|$ durch $\|\vec{x}_{1,0} - \vec{x}_{2,0}\|$ für alle Zukunft ab!

Bsp.: $x' = x \Rightarrow$ besser als exponentiell in t kann gar nicht erwartet werden!

SATZ 1. Gegeben sei v wie beschrieben, $\vec{x}_0 \in U$ und $\varphi : [0, b] \rightarrow U$ eine Integralkurve von $\vec{x}' = v(\vec{x})$ mit $\varphi(0) = \vec{x}_0$

Dann gibt es $r > 0$, $L > 0$, so dass

- (1) jede Lösung eines AWP $\vec{x}' = v(x)$, $\|\vec{x}(0) - \vec{x}_0\| \leq r$ ist mindestens auf $[0, b]$ definiert.
- (2) Sind ψ_1, ψ_2 Integralkurven mit $\|\psi_j(0) - \vec{x}_0\| \leq r$, dann gilt
$$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\| \leq \|\psi_1(0) - \psi_2(0)\| e^{LT}$$

Um jeden Punkt $\varphi(t)$ lege Kreisscheibe, Radius $\varrho > 0$. Deren Vereinigung heiße $K(\varrho) =$ " ϱ -Wurst" aus dem Bild.

- (3) Liegt $K_\varrho \subset U$, dann kann $L = \max_{\vec{x} \in K_\varrho} \|J_v(\vec{x})\|$ gewählt werden.

$$re^{Lb} = \varrho$$

Sei v wie oben beschrieben. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $0 \in I$.

Sei $U_0 \subset U$, Gibt es eine Funktion $\Phi : I \times U_0 \rightarrow U$ mit:

$$t \mapsto \phi(t, \vec{x}_0) \text{ löst das AWP } \vec{x}' = v(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

dann heißt $\Phi(t)$ der (lokale) Fluss auf $I \times U_0$.

Ist $I = \mathbb{R}$, $U_0 = U$ (z.B. bei linearen Dgl), dann heißt Φ der globale Fluss.

Alternativ:
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \vec{x}) = v(\Phi(t, \vec{x})); \quad \Phi(0, \vec{x}) = \vec{x}$$

SATZ 2. Jeder Fluss ist stetig diffbar (als Funktion von (t, \vec{x}))

Ziel: der Fluss ist volumentreu $\Leftrightarrow \operatorname{div} v = 0$ auf ganz U

Wiederholung:

$v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, stetig diffb. VF

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$; $U_0 \subset U$. (Ein) lokaler Fluss auf $I \times U_0$ ist eine (diffb.) Abb. $\Phi : I \times U_0$ mit

(i) Φ part. diffb. nach t ,

(ii) $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \vec{x}) = v(\Phi(t, \vec{x}))$

(iii) $\Phi(0, \vec{x}) = \vec{x}$

(m.a.W.: für jedes $\vec{x}_0 \in U_0$ löst $t \mapsto \Phi(t, \vec{x}_0)$ das AWP $\vec{x}' = v(\vec{x})$; $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$)

Wenn es den lokalen Fluss gibt, dann ist dieser eindeutig (denn $\vec{x}' = v(\vec{x})$ ist lokal Lipschitz wegen: v diffb.).

Fixiere *ein* $t \in I$. Dann heißt

$$\Phi_t : U_0 \rightarrow U; \vec{x} \mapsto \Phi(t, \vec{x})$$

Zustandsabbildung (zum Zeitpunkt t).

Da AWP diffb. vom Startwert abhängt, ist $\Phi_t : U_0 \rightarrow \Phi_t(U_0)$ bijektiv und diffb. Ist $V_0 = \Phi_t(U_0)$, dann lasse Zeit rückwärts laufen; Umkehrung diffb.

SATZ. Die Zustandsabbildung bildet U_0 für jedes t umkehrbar und in beide Richtungen diffbar auf $\Phi_t(U_0)$ ab.

SATZ. Sei U offen, $U \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset U$ kompakt. Sei $U \subset K$. Dann gibt $c > 0$ (hängt nur von K ab!), so dass mindestens auf $[0, c] \times U_0$ der lokale Fluss existiert.

Erinnerung: **SATZ.** der Fluss $\Phi(t, \vec{x})$ ist stetig diffb. auf $I \times U_0$

In der Def. des Flusses diff. nach x_i . Wegen $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1}$

$$\frac{\partial}{\partial t} J_{\Phi_t}(\vec{x}) = J_v(\Phi(t, \vec{x})) J_{\Phi_t}(\vec{x}) \quad (*)$$

(hier ist J_F die Funktionalmatrix einer Abb. F)

(*) ist Dgl-System 1. Ordnung für die n^2 Einträge in J_{Φ_t} ; "Variationsgleichung des Vektorfeldes v "

Nach dem Satz von Liouville nimm det von (*):

$$\frac{d}{dt} \det J_{\Phi_t}(\vec{x}) = \operatorname{div} v(\Phi(t, \vec{x})) \det J_{\Phi_t}(\vec{x}) \quad (**)$$

(**) erklärt die Divergenz anschaulich: ist $\operatorname{div} v(\vec{x}) > 0$, dann wird eine "kleine Umgebung" von \vec{x} mit laufender Zeit durch den Fluss *größer*.

Folgerung: Sei $U_0 \subset U$ eine Menge endlichen Inhalts $\int_{U_0} d\vec{x}$. Zu jedem Zeitpunkt t habe $\int_{\Phi_t(U_0)} d\vec{x}$ denselben Inhalt. Dann $\operatorname{div} v = 0$.

9.7 Einige gewöhnliche DGL und ihre Lösungen

nur gewöhnliche Dgl *einer* Variablen.

(1) die homogene lineare Dgl 1. Ordnung: $y' = A(x)y(x)$

Sei dabei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$L =$ Lösungen; bilden 1-dim. VR. Insbesondere ist $y(x) \equiv 0$ eine Lsg.

Ist z.B. $y(x_0) > 0$, dann $A(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = (\log y)'$

$$\int_{x_0}^x A(t) dt = \int_{x_0}^x (\log y)' = \log y(x) + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \exp \int_{x_0}^x A(t) dt, \quad a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

Also ist $L = \{a \exp \int_{x_0}^x A(t) dt : a \in \mathbb{R}\}$

(2) die lineare inhomogene Dgl 1. Ordnung $y' = A(x)y + B(x)$ mit $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Gesucht ist *eine* Lösung ψ ; dann sind *alle* Lsg. gegeben durch $\psi + \varphi$, $\varphi \in L = \{\varphi : \varphi' = A\varphi\}$

Ansatz (Variation der Konstanten)

$$\psi(x) = a(x) \exp \int_{x_0}^x A(t) dt$$

$$\psi'(x) = a'(x) \left(\exp \int_{x_0}^x A(t) dt \right) + a(x)A(x) \left(\exp \int_{x_0}^x A(t) dt \right)$$

$$\psi' = A\psi + B \Leftrightarrow B(x) = a'(x) \exp \int_{x_0}^x A(t) dt$$

Eine Lösung entsteht durch

$$a(x) = \int_{x_0}^x \frac{B(\xi)}{\exp \int_{x_0}^{\xi} A(t) dt} d\xi$$

- (3) Bernoulli-Differentialgleichung $y' = A(x)y + B(x)y^\alpha$
mit stg. $A, B : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ (sonst Fall (2)), $\alpha \neq 1$ (sonst Fall (1))

Idee: sei φ eine Lösung mit $\varphi(x) > 0$ auf ihrer Def-Menge.

Betrachte $\psi(x) = \varphi(x)^{1-\alpha}$

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= (1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha}\varphi'(x) \\ &= (1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha}(A(x)\varphi(x) + B(x)\varphi(x)^\alpha) \\ &= (1-\alpha)(A(x)\psi(x) + B(x)) \quad (*)\end{aligned}$$

Jede Lsg. φ der Bernoulli-Dgl mit $\varphi(x) > 0$ überall liefert über $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ eine Lsg. der inhomogenen Dgl (*).

Ist umgekehrt ψ eine positive Lsg. von (*), dann löst $\varphi = \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$ die Bernoulli-Dgl.

- (4) Dgl der Form $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$
"Trennung der Variablen"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Leftrightarrow g(y) dy = f(x) dx$$

→ ok als Diff-Form, denn: $dy = y'(x) dx = \frac{f(x)}{g(y)} dx$

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x g(y(x))y'(x) dx$$

Ist F Stammfunktion zu f und G Stammfunktion zu g , dann gilt also

$$c + F(x) = G(y(x)) \text{ mit } c \text{ beliebig.}$$

Ist g immer positiv, dann ist G monoton wachsend, also umkehrbar,

$$y(x) = G^{-1}(c + F(x))$$

- (5) Das Letzte: Die Riccati-Dgl

$A, B, C : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

$$y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2 \quad (*)$$

i.a. gibt es *keine* elementaren Lösungen.

"spezielle Riccati-Dgl":

$$y' = y^2 + \beta x^\alpha \quad (\beta \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R})$$

$$(B = 0, C = 1, A(x) = \beta x^\alpha)$$

”**Sätzchen**”. Gegeben sei eine Riccati-Dgl und eine Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $\varphi(x) \neq \psi(x) \forall x \in I$.

Genau dann löst φ die Riccati-Dgl, wenn $\frac{1}{\varphi - \psi} = \eta$ die lineare Dgl

$$\eta' = -\eta(2C(x)\psi(x) + B(x)) - C(x) \quad (**)$$

löst.

Letzte Vorlesung löst (**) vollständig. Ist φ eine Lösung von (*), dann ist entweder $\varphi = \psi$ oder $\varphi(x) \neq \psi(x) \forall x$.

Also sind *alle* Lsg. von (*) bekannt, sobald *eine* Lösung bekannt ist.

denn:

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{\psi' - \varphi'}{(\varphi - \psi)^2} = -\eta(2C\psi + B) - C \\ &= \frac{-1}{\varphi - \psi}(2C\psi + B) - C \end{aligned}$$

$$\varphi' - \psi' = (\varphi - \psi)(2C\psi + B) + C(\varphi - \psi)^2$$

$$\psi' = A + B\psi + C\psi^2$$

$$\Rightarrow \varphi' = A + B\varphi + C\varphi^2; \text{ alles umkehrbar!}$$

Sonderfall: $y' = y^2 + \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{y^2 + \beta} = dx$$

Für $\beta > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} \arctan \frac{y}{\sqrt{\beta}} = x + c$$

Leider gilt: $y' = y^2 + \beta x^\alpha$ habe für $\beta \neq 0$ eine elementare Lösung.

$$\Rightarrow \alpha = -2, \quad \alpha = \frac{4n}{1-2n}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

9.8 Die Fourier-Transformation

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ L-intbar. } \left(\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right)$$

$$L^1(\mathbb{R}) = \{\text{alle solchen } f\}$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt$$

$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; heißt Fourier-Transformierte von f ;
 $L^1(\mathbb{C}) = \{f = g + ih : g, h \in L^1(\mathbb{R})\}$; $\hat{f} := \hat{g} + i\hat{h}$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^1 e^{-2\pi itx} dt = \frac{e^{-2\pi itx}}{-2\pi ix} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{-2\pi ix} - e^{2\pi ix}}{-2\pi ix} = \frac{\sin 2\pi x}{\pi x}$$

Wir sehen: $f \in L^1(\mathbb{R})$, aber \hat{f} nicht

Zunächst im Beispiel ist \hat{f} stetig, obwohl f es nicht ist!

$$|f(t)e^{-2\pi itx}| = |f(t)|$$

SATZ 1. ist $f \in L^1(\mathbb{C})$, dann ist $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$

Sei $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfkt mit $\int |f - t| dx < \varepsilon$

Für t kann wie im Beispiel \hat{t} explizit ausgerechnet werden;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{t}(x) = 0$$

$$\hat{f}(x) - \hat{t}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(u) - t(u)) e^{-2\pi iux} du$$

$$|\hat{f}(x) - \hat{t}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(u) - t(u)| du < \varepsilon$$

allgemeines Prinzip: ist f "stark lokalisiert", dann ist \hat{f} "breit"

Rechentrick: "Faltung" von Funktionen

Gegeben $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy$$

heißt **Faltung** von f und g . Es gilt $f * g = g * f$

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$$

SATZ 2. $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$

denn:

$$\begin{aligned} \int |f * g(x)| dx &= \int \left| \int f(y)g(x - y) dy \right| dx \\ &= \int \int |f(y)g(x - y)| dy dx = \int |f(y)| dy \int |g(z)| dz \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$

$$f * f(x) = \int_{-1}^1 f(x-y) dy$$

SATZ 3. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

Beispiel: $k(x) = \max(0, 1 - |x|)$

$$\hat{k}(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2$$

(„seltenes Paar“: k und \hat{k} sind nicht-negativ)

$$\boxed{\hat{\hat{k}} = k}$$

SATZ 4. Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $f(x) = 0$ außerhalb eines endlichen Intervalls. Dann hat \hat{f} Werte $\neq 0$ mit beliebig großem x .

Wiederholung:

$$L^1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ L-intbar}\} \quad \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

($\hat{=} f, |f|$ sind über \mathbb{R} intbar)

Erinnerung: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum |x_i|^2}; \quad \|\vec{x}\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max |x_i|$$

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (\text{auf } L^1)$$

$$\|f\|_\infty = \sup |f(t)|$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt}; \quad L^2 = \{f : \|f\|_2 < \infty\}$$

Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist

$$\hat{f}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i2\pi t x} dt$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ existent; $\hat{f}(x)$ ist stetig;

$$|\hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1$$

d.h.: $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$; es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$$

$f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Bilde

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy$$

SATZ 2. $f, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^1$

SATZ 3. $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f * g(t)e^{-2\pi itx} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y) dy e^{-2\pi itx} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-y)e^{-2\pi itx} dt f(y) dy \quad t-y=s \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-2\pi is(s+y)} ds f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\infty}^{-\infty} g(s)e^{-2\pi isx} ds \right) f(y)e^{-2\pi ixy} dy \\ &= \hat{g}(x)\hat{f}(x) \end{aligned}$$

$$(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g; \quad f * g = g * f$$

Frage: gibt es $k \in L^1$, die für $*$ eine "Eins" ist, d.h. $k * f = f$??

$$f(x) = \int k(y)f(x-y) dy = \int f(y)k(x-y) dy$$

Gibt's nicht, denn: $\hat{f} = \widehat{k * f} = \hat{k}\hat{f} \Rightarrow \hat{k} \equiv 1$

Einige Transformationsformeln:

LEMMA 1. $f, g \in L^1$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)g(x) dx$$

denn:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t)e^{-2\pi itx} dt dx && dt \text{ und } dx \text{ tauschen nach Fubini} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)g(t) dt \end{aligned}$$

Sei $h \in \mathbb{R}$, $f \in L^1$. ${}^h f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow f(x+h)$

$$\begin{aligned} \widehat{{}^h f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} {}^h f(t)e^{-2\pi itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+h)e^{-2\pi itx} dt && t+h=s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi is(x-h)} ds = e^{2\pi ihx} \hat{f}(x) \end{aligned}$$

LEMMA 2. Ist für $h \in \mathbb{R}$ die Fkt. ${}^h f$ durch ${}^h f(x) = f(x+h)$ erklärt, dann gilt für alle $f \in L^1$

$$\widehat{{}^h f}(x) = e^{2\pi ihx} \hat{f}(x)$$

Sei $\lambda > 0$, $f \in L^1$. Sei $f_\lambda(x) := \lambda f(\lambda x)$

$$\begin{aligned} \hat{f}_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda t)e^{-2\pi itx} dt && \lambda t = s \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi isx/\lambda} ds = \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

LEMMA 3. Sei $f \in L^1$, $\lambda > 0$ und $f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$. Dann gilt

$$\hat{f}_\lambda(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Warnung: $(\hat{f})_\lambda(x) = \lambda \hat{f}(\lambda x)$, nicht verwechseln mit $(\widehat{f_\lambda})(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

In übersichtlichen Situationen: $(\sin f)^\wedge$

F-Trafo und Ableitungen: $f, f' \in L^1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(|x|) = 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-2\pi itx} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{-2\pi itx} dt \\ &= 2\pi ix \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi itx} dt = 2\pi ix \hat{f}(x) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \hat{f}(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t x} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i t f(t) e^{-2\pi i t x} dt \\ &= -(2\pi i t f(t))^{\text{Dach}}(x) \end{aligned} \quad (2)$$

LEMMA 4.

(i) Ist $f, f' \in L^1$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(|x|) = 0$, dann gilt (1)

(ii) Sind $f(t)$ und $tf(t)$ in L^1 , dann gilt (2)

Beispiel: $f(x) = e^{-\pi x^2}$; $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x)$

$\Rightarrow f$ ist die (einzige!) Lösung der Dgl $y' = -2\pi x y$ mit $y(0) = 1$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt \\ \frac{d}{dx} \hat{f}(x) &\stackrel{(2)}{=} - \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi i t e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\pi t^2} \right) e^{-2\pi i t x} dt \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-2\pi i t x} \right) dt \\ &= -2\pi x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t x} dt \\ &= 2\pi x \hat{f}(x) \end{aligned}$$

Es gilt aber $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$ (wegen $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

\hat{f} genügt also derselben Dgl wie f , $\hat{f}(0) = f(0)$.

Also: $(e^{-\pi t^2})^\wedge(x) = e^{-\pi x^2}$.

Wir brauchen jetzt eine Funktion $k \in L^1$, $k(x) = k(-x)$, $k(0) = 1$, $\int k(x) dx = 1$. Es sei ferner: $k(x) \geq 0$, $\hat{k}(x) \geq 0$, $\hat{\hat{k}} = k$.

Solche gibt's: $k(x) = e^{-\pi x^2}$; $k(x) = \max(0, 1 - |x|)$

$$\hat{k}(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2$$

$\hat{k} = k$ lässt sich nachrechnen *oder*: $k(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$

”Wunschatalog”: gesucht Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

(i) $k \in L^1, \hat{k} \in L^1$

(ii) $k(x) \geq 0,$
 $\text{hat } k(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $k(0) = \hat{k}(0) = 1$ $\hat{k}(0) = \int k(t) dt$

(iv) $k(x) = k(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \hat{k}$

$$\hat{k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{-2\pi i t x} dt$$

Erfüllt k den Katalog, dann auch \hat{k} . Jede solche Funktion heißt **Summationskern**.

LEMMA 5. Ist k Summationskern, dann auch \hat{k} .

Die Funktion $e^{-2\pi t^2}$ ist Summationskern.

$$k_\lambda(x) := \lambda k(\lambda x) \quad (\text{def. für } \lambda > 0)$$

$$\widehat{k_\lambda}(x) = \hat{k}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{k_\lambda}} &= \int \hat{k}\left(\frac{t}{\lambda}\right) e^{-2\pi i t x} dt & \frac{t}{\lambda} &= s \\ &= \lambda \int \hat{k}(s) e^{-2\pi i s(\lambda x)} ds \\ &= \lambda \hat{k}(\lambda x) = \lambda k(\lambda x) = k_\lambda(x) \end{aligned}$$

LEMMA 6. Ist k Summationskern und $\lambda > 0$, dann gilt

$$\widehat{\widehat{k_\lambda}} = k_\lambda$$

Wie sieht ein Summationskern aus?

Wähle $\delta > 0$ und dann $X = X(k, \delta)$ mit $\int_{-X}^X k(t) dt > 1 - \delta$

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T k_\lambda(t) dt &= \lambda \int_{-T}^T k(\lambda t) d(t) \\ &= \int_{-\lambda T}^{\lambda T} k(s) ds & T &= X/\lambda \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)k_{\lambda}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)k_{\lambda}(-x) dx = f * k_{\lambda}(0)$$

gilt für jede $f \in L^1$

LEMMA 7. Sei $f \in L^1$, in 0 stetig und $|f(x)| \leq c$ für alle x . Dann gilt für jeden Sum.-kern k

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f * k_{\lambda}(0) = f(0) \quad (*)$$

Ist $k(t) = e^{-\pi t^2}$, dann gilt (*) sogar für *alle* $f \in L^1$, die in 0 stetig sind. (d.h. hier muss f nicht beschränkt sein!)

Warum?

$$\int k_{\lambda}(x)f(x) dx \quad f(x) = f(0) + \text{sehr klein}$$

$$\approx f(0) \int k_{\lambda}(x) dx = f(0)$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| < \varepsilon \forall |x| < \delta$

Wähle λ so groß, dass $\frac{X}{\lambda} < \delta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{\lambda}(x)f(x) dx = \int_{-X/\lambda}^{X/\lambda} k_{\lambda}(x)f(x) dx + \underbrace{\int_{|x| \geq X/\lambda} k_{\lambda}(x)f(x) dx}_{\text{klein, } < \delta c}$$

mit $|F| < \varepsilon + \delta$: $f(0)(1 + F)$ vor $\int_{-X/\delta}^{X/\delta} k_{\lambda}(x)f(x) dx$

Zusatz zu LEMMA 7. Ist f in 0 nicht mehr stetig, existieren aber

$$f(0+) := \lim_{x \searrow 0} f(x) \text{ und } f(0-) = \lim_{x \nearrow 0} f(x)$$

dann gilt unter den sonstigen Voraussetzungen wie in Lemma 7

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} k_{\lambda} * f = \frac{1}{2}(f(0+) + f(0-))$$

Erinnerung: $\int f \hat{g} dx = \int \hat{f} g dx$ (Lemma 1)

$$\int \hat{f}(x) \widehat{k_{\lambda}}(x) dx = \int f(x) \widehat{\widehat{k_{\lambda}}}(x) dx = \int f(x) k_{\lambda}(x) dx = f * k_{\lambda}(0) \rightarrow f(0)$$

Fourier'scher Integralsatz Sei $f \in L^1$, in 0 stetig und beschränkt. Dann gilt für jeden Summationskern

$$f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \hat{k}\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

Spezialfall: $k(t) = e^{-\pi t^2}$

$$f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-\pi(x/\lambda)^2} dx$$

Korollar: ist $\hat{f} \in L^1$, dann gilt

$$\boxed{\int \hat{f}(x) dx = f(0)}$$

Sei $h \in \mathbb{R}$; ${}^h f(x) = f(x+h)$ ${}^h f(0) = f(h)$
 $\widehat{{}^h f}(x) = e^{2\pi i h x} \hat{f}(x)$

Fourier'sche Umkehrformel: Sei $f \in L^1$, in $h \in \mathbb{R}$ stetig, und auf \mathbb{R} beschränkt. Dann gilt für jeden Summationskern

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} \hat{k}(t/\lambda) dt = f(h)$$

Ist f in h nicht stetig, aber $f(h+)$, $f(h-)$, dann gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} \hat{k}(t/\lambda) dt = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$$

Spezialfälle: $k(t) = e^{-\pi t^2}$. Dann muss f nicht beschränkt sein; für $f \in L^1$ mit $f(h+)$, $f(h-)$ ex., gilt

$$\frac{1}{2}(f(h+) + f(h-)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} e^{-\pi t^2/\lambda^2} dt$$

Ist sogar $\hat{f} \in L^1$, dann gilt die "Umkehrformel"

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} dt = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$$

Kurzfassung: $\hat{\hat{f}}(-h) = \frac{1}{2}(f(h+) + f(h-))$

Beispiele: $k(x) = \max(0, 1 - |x|)$

$\hat{k}(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 \geq 0$, $\hat{k} \in L^1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 e^{-2\pi i x h} dx = \max(0, 1 - |h|) \quad (1)$$

$\Rightarrow \hat{k} = k$. Mit $h = 0$ gibt (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx = 1$$

Folgerung: die Funktionen $\max(0, 1 - |x|) =: \Lambda(x)$ und $\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 =: \Upsilon(x)$ sind Summationskerne.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^4 dx &= \int \Upsilon(x)^2 = \int \hat{\Lambda}(x) \Upsilon(x) dx \\ &= \int \Lambda(x) \hat{\Upsilon}(x) dx \\ &= \int \Lambda(x)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 (1-x)^2 dx \end{aligned}$$

mit $\hat{\Lambda} = \Upsilon$, $\hat{\Upsilon} = \Lambda$ und $\int \hat{f}g dx = \int f\hat{g} dx$

$$f(h) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} \hat{k} \left(\frac{t}{\lambda} \right) dt$$

Für $k = \Upsilon \Rightarrow \hat{k} = \Lambda$

$$\frac{1}{2}(f(h+) + f(h-)) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(t) e^{2\pi i t h} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda} \right) dt$$

Fourier-Transfo auf Partielle DGL

$$\hat{f}(x) = \int f(y) e^{-2\pi i y x} dy$$

$$f * g(x) = \int f(y) g(x - y) dy$$

Interpretiere auf \mathbb{R}^n : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, L-intbar.

$$\hat{f}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} d\vec{y} = \iint_{-\infty}^{\infty} \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{y}) e^{-2\pi i x_1 y_1} dy_1 \right) e^{-2\pi i x_2 y_2} dy_2 \dots dy_n$$

Umkehr-Formel bleibt richtig:

$$\int \hat{f}(\vec{y}) e^{2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} d\vec{y} = f(\vec{x})$$

wenn \hat{f} int-bar auf f in \vec{x} stetig ist.

Faltung:

$$\begin{aligned} f * g(\vec{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) g(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \dots, y_n) g(x_1 - y_1, \dots) dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

Alles, was bisher gemacht wurde, bleibt auf \mathbb{R}^n richtig, wenn xy als $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ gelesen wird.

Beachte:

$$\int \frac{\partial f}{\partial y_1}(y_1 \dots y_n) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} dy_1 \dots dy_n \stackrel{\text{part. Int.}}{=} (2\pi i x_1) \hat{f}(\vec{x})$$

(wenn $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1$, $f(\vec{x}) \rightarrow 0(|\vec{x}| \rightarrow \infty)$)

Fourier's Behandlung der Wärmeleitung

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} - \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \hat{f}(x, t) = (2\pi i x)^2 \hat{u} + (-2\pi i t) \hat{u}$$

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{f}(x, t)}{-2\pi i t + (2\pi i x)^2} = \frac{\hat{f}(x, t)}{-4\pi^2 x^2 - 2\pi i t}$$

Allgemeiner können "partielle Dgl mit konstanten Koeff." so behandelt werden:

$P(x_1, \dots, x_n)$ Polynom: (z.B. $x_1^2 - x_2$; $x_1^2 - x_2^2$, $x_1 x_2^2 \dots$)

$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ Diff-Operator zu P , z.B. $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2}$; $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$; $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$

Eine (inhomogene) part. Dgl mit konstanten Koeff. ist gegeben durch ein Polynom P und eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Form

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = f$$

$$\hat{f} = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u \right)^\wedge = P(2\pi i x_1, \dots, 2\pi i x_n) \hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(\vec{x}) = \frac{\hat{f}(\vec{x})}{P(2\pi i \vec{x})}$$

allgemeines Prinzip: ist $P(\vec{x}) \neq 0$ auf \mathbb{R}^n , dann kann u mit der Umkehrformel berechnet werden!

Vorsicht: ob es eine Lösung gibt, hängt empfindlich von P und \hat{f} ab!! (Für Wärmeleitung und $\frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = f(x, t)$ o.k.)

9.9 Fourier-Reihen

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Periode 1

$[0, 1]$ wird Gruppe unter Addition, wenn "ganze Anteile vergessen werden"

$x \in \mathbb{R}$; $[x] \in \mathbb{Z}$; $\{x\} \in [0, 1)$

$x = [x] + \{x\}$

$\{x + y\} f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sind *dasselbe* wie 1-periodische Fkt.

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x n} dx \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

$\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ heißen Fourier-Koeff. von $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$.

Hier ordnet die F-Transfo jede 1-periodische Fkt. eine **Folge** $\hat{f} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ zu.

LEMMA 1. $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow \lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \hat{F}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \hat{f}(n)$$

Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sei

$$f * g(x) = \int_0^1 f(y) g(x - y) dy = g * f(x)$$

SATZ 1. $f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ und es gilt

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$$

denn:

$$\begin{aligned} f * g(n) &= \int_0^1 f * g(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 \int_0^1 f(y) g(x - y) e^{-2\pi i n x} dx dy \\ &\stackrel{x-y=z}{=} \int_0^1 \int_0^1 f(y) g(z) e^{-2\pi i (z+y)n} dz dy = \hat{f}(n) \hat{g}(n) \end{aligned}$$

Es gibt kein $k \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit $k * f(x) = f(x) \forall f, \forall x$.
(sonst.: $\widehat{k * f} = \hat{k} \hat{f} \Rightarrow \hat{k}(n) = 1 \forall n$, geht nicht wegen Lemma 1.)

Ersatz "Fejer-Kern":

$$k_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \right)^2, \text{ hat Periode } 1;$$

Zum Vergleich: für F-Transfo:

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right)^2 & K_\lambda(t) &= \lambda K(\lambda t) \\ K_\lambda(t) &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sin \pi \lambda t}{\pi t} \right)^2 \Rightarrow \hat{K} = \max(0, 1 - |x|) \end{aligned}$$

SATZ 2. (Approximation der Faltung-Eins). Sei

$$k_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} \right)^2$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ in $x \in [0, 1]$ stetig. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k_N * f(x) = f(x)$$

Ist f in x nicht mehr stetig, existieren aber $f(x+) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h)$ und $f(x-) = \lim_{h \searrow 0} f(x-h)$, dann gilt noch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} k_N * f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

Beweis: siehe Faltung auf $L^1(\mathbb{R})$ in Pararaph 8.

Umkehrformel: sei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, in $x \in [0, 1]$ gebe es die Grenzwerte $f(x+)$, $f(x-)$. Dann ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e^{2\pi i x n} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

Folgerung: ist $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ konvergent, dann $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$

Analoge Formen für F-Transfos: (siehe Paragraph 8)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} \left(1 - \frac{|y|}{\lambda} \right) dy = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

Merkregel: stetige, 1-periodische Funktionen sind durch Angabe ihrer F-Koeff. eindeutig bestimmt!

Anwendung: Wärmeleitung in einem ringförmigen Draht:

Gesucht ist eine Funktion $u(x, t)$ mit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $t \in [0, \infty)$ mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ stetig differenzierbar. $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x n} dx = f(x) \frac{e^{-2\pi i x n}}{2\pi i n} \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) \frac{e^{-2\pi i x n}}{-2\pi i n} dx \\ &= \left(\int_0^1 f'(x) e^{-2\pi i x n} dx \right) \frac{1}{2\pi i n} = \frac{\hat{f}'(n)}{2\pi i n} \end{aligned}$$

LEMMA 2. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ zweimal stetig differenzierbar, dann gilt

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^1 |f''(t)| dt$$

Insbesondere kann jede 2mal stetig diffbare 1-periodische Funktion f in der Form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

geschrieben werden!

Ansatz für die Wärmeleitungsgleichung: für jedes $t \in [0, \infty)$ kann $u(x, t)$ als Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{2\pi i n x}$$

geschrieben werden; diese Reihe ist a priori absolut konvergent.

Annahme: $c_n(t)$ sind nach t diffbar!

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{2\pi i n x} (2\pi i n)^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(t) e^{2\pi i n x} \\ f(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(t) e^{2\pi i n x} \end{aligned}$$

Also $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$ gilt genau dann, wenn:

$$c_n(t)(2\pi i n)^2 - c_n'(t) = b_n(t) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}, \text{ alle } t$$

Diese Dgl's sind von Hand explizit lösbar \Rightarrow Lösungen $u(x, t)$.

"Inverse Fourier-Theorie und die Faltung auf \mathbb{Z} ":

$$\text{Faltung auf } \mathbb{R}: f, g \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy$$

$$\text{Faltung auf } \mathbb{R}/\mathbb{Z}: f, g \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \quad f * g(x) = \int_0^1 f(y)g(x-y) dy$$

Faltung auf \mathbb{Z} : $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\text{für } x, y, z \in \mathbb{Z} \quad f * g(x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)$$

$$l^1(\mathbb{Z}) = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| \text{ konvergiert}\}$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} |f * g(x)| \leq \sum_y \sum_x |f(y)g(x-y)| = \sum_y |f(y)| \sum_z |g(z)| \text{ mit } z = x - y$$

Diese Rechnung zeigt: für $f, g \in l^1(\mathbb{Z})$ konvergiert die Reihe

$$f * g(x) := \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)$$

für alle $x \in \mathbb{Z}$ absolut, es gilt $f * g = g * f$, und $f * g \in l^1(\mathbb{Z})$

Jedem $f \in l^1(\mathbb{Z})$ ordne zu

$$\check{f}(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{2\pi inx};$$

diese Reihe konvergiert gleichmäßig, und deshalb ist $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ sogar stetig.

LEMMA 3. $f, g \in l^1(\mathbb{Z})$. Dann gilt $(f * g)^\vee = \check{f}\check{g}$

$$\begin{aligned} (f * g)^\vee(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f * g(n)e^{2\pi inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)e^{2\pi inx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n-k)e^{2\pi inx} \quad ; \quad n-k = m \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)e^{2\pi imx} \right) e^{2\pi ikx} \\ &= \check{f}(x)\check{g}(x) \end{aligned}$$

$M = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$; $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Falten auf M :

$$f * g(x) = \int_0^{\infty} f(y)g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y} = g * f(x) \quad y \mapsto ay$$

Poisson'sche Summenformel

$f \in L^1(\mathbb{R})$: $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ hat Periode 1

(denn $F(x+1) = \sum f(x+(1+n)) = F(x)$ mit $k = n+1$)

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \int_0^1 F(t) E^{-2\pi i k t} dt$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+1) e^{-2\pi i k t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(\tau) e^{-2\pi i k(\tau-n)} d\tau \quad \text{mit } t+n=\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2\pi i k \tau} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} \end{aligned}$$

Poisson'sche Summenformel. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und 2mal stetig diffbar.

Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+x)$ konvergiere gegen eine stetige Funktion.

Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

Speziell für $x=0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

Beispiel: $f(x) = \Upsilon(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$; $\hat{f}(x) = \Lambda(x) = \max(0, t - |x|)$

Alle Voraussetzungen ok!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi(x+n)}{\pi(x+n)}\right)^2 = 1 \quad (*)$$

Speziell: $x = \frac{1}{2}$ $(\sin \pi(n + \frac{1}{2}))^2 = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(n + \frac{1}{2})^2} \Leftrightarrow \pi^2 = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= 8 \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 8 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Übungen:

(1) was passiert mit $x = \frac{1}{4}$ in (*)?

(2) was sagt Poisson'sche \sum -Formel mit $f(x) = e^{-\pi x^2}$

Soeben gesehen: $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{Euler 1737}$$

Ziel: Funktionen mit "großer Periode" $2T$ transportieren mit $T \rightarrow \infty$ Fourier-Reihen in F-Transfo:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \begin{cases} f(x) \text{ für } |x| < T \\ \text{setze fort mit Periode } 2T \end{cases}$$

$\Rightarrow G_T(\xi) := F_T(2T\xi)$ hat Periode 1

$$\begin{aligned} F_T(2T\xi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \xi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_T(\xi) e^{-2\pi i n \xi} d\xi \quad 2T\xi = \tau \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \xi} \int_{-T}^T F_T(\tau) e^{-2\pi i n \frac{\tau}{2T}} dt \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \xi} \int_{-T}^T f(\tau) e^{-2\pi i n \frac{\tau}{2T}} dt \end{aligned}$$

$$\boxed{2T\xi = x}$$

$$F_T(x) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \frac{x}{2T}} \int_{-T}^T f(\tau) e^{-2\pi i \tau \frac{n}{2T}} d\tau$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x y} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2\pi i \tau y} d\tau}_{\hat{f}(y)} dy$$

9.10 Der Schwartz-Raum und die F-Transfo als orthogonale Abbildung

Laurent-Schwartz:

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **rasch fallend**, wenn gelten:

- (i) f ist ∞ oft diffbar
- (ii) Für Polynome $P, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} P(\vec{x})Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(\vec{x}) = 0$$

Beispiele rasch fallender Funktionen:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f(\vec{x}) = e^{-2\pi\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$h(x)h(1-x) = 0 \text{ auf } x < 0 \text{ bzw. } x > 1 \\ > 0 \text{ auf } 0 < x < 1$$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt; f sei ∞ -oft diffbar mit $f(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x} \in K$. Dann ist f rasch fallend. (denn unter F-Trafo tauschen (ii) P und Q die Rollen)

$\mathfrak{S}^n =$ Menge aller rasch fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}^n =$ "Schwartz-Raum"

$\hat{\cdot} : \mathfrak{S}^n \rightarrow \mathfrak{S}^n$ bijektiv (wegen Umkehrformel)

wegen $\hat{\hat{f}} = f$ kommen als EQ nur $\pm 1, \pm i$ in Frage!

Auf \mathfrak{S}^n gibt es ein Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\overline{g(\vec{x})} d\vec{x} \quad \boxed{\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle}$$

$$\int f(x)\hat{h}(x) dx = \int \hat{f}(x)h(x) dx$$

$$\langle f, \hat{h} \rangle = \langle \hat{f}, h \rangle$$

Wiederholung:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k f^{(n)}(x) = 0 \quad (\text{alle } k, \text{ alle } n)$$

$\mathfrak{S}^n = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \text{ rasch fallend}\}$

$\vee, \mathfrak{S}^n \rightarrow \mathfrak{S}^n$

Auf \mathfrak{S}^n gibt's ein Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) \overline{g(\vec{x})} d\vec{x}$$

Es gilt

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle}$$

"F-Transfo is orthogonal"; EW können höchstens $\pm 1, \pm i$ sein.

$$\|f\|_2^2 := \int |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} = \langle f, f \rangle$$

$\|\cdot\|_2 : \mathfrak{S}^n \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Norm; es ist $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$

$$\int |f|^2 d\vec{x} = \int |\hat{f}|^2 d\vec{x} \text{ (Parseval'sche Gleichung)}$$

$\|f - g\|_2 \leq 2$ Intervallbreite der Glättung.

Das zeigt: Grenzwerte von Folgen in \mathfrak{S}^n sind i.a. nicht einmal stetig.

Sätzchen: seien $f_n \in \mathfrak{S}$ eine Folge rasch fallender Funktionen, und $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ mit $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Dann gibt es eine Nullmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, s.d.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\vec{x}) =: f(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \notin E;$$

und es gilt $\int |f|^2 d\vec{x} < \infty$. Wird \mathfrak{S}^n durch diese Grenzwerte ergänzt, dann wird aus \mathfrak{S}^n ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt; dieser heißt $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Def. der Fourier-Transfo auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Problem: i.a. existiert $\int e^{-2\pi ixy} f(y) dy$ nicht, wenn nur $\int |f|^2 dy < \infty$ bekannt ist.

Bsp.: $f(y) = \begin{cases} y^{-1} & (y > 1) \\ 0 & (y < 1) \end{cases}$ ist in L^2 , und $\int_1^\infty y^{-2} dy < \infty$, aber $\int_1^\infty y^{-1} dy$ ex. nicht!

Lösung: $f \in L^2$. Wähle $f_n \in \mathfrak{S}$ mit $f_n \rightarrow f$; f_n Cauchy; $\Rightarrow \hat{f}_n$ sind Cauchy in L^2 . Definiere $\hat{f} := \lim f_n$

Alternativer Zugang:

$K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\int_K 1 \cdot |f| d\vec{x} \leq \left(\int_K 1 d\vec{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Auf beschränkten Mengen gilt $L^1 \subset L^2$

Sei jetzt $f \in L^2$ gegeben; $f_n(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \|\vec{x}\| \leq N \\ 0 & \|\vec{x}\| > N \end{cases}$

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_{\|\vec{x}\| > N} |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\|\vec{x}\| \leq N} f(\vec{x}) e^{-2\pi i \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} d\vec{x} = \hat{f}(\vec{y})$$

(außerhalb einer Nullmenge)

$$l^2 = \{(a_n) : \sum |a_n|^2 < \infty\}$$

Fourier-Reihen: $\sum a_n e^{2\pi i n x} = f(x)$

$$f \in L^2[0, 1]$$

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$; $e^{2\pi i n x}$ sind ONS bzgl. dieses Skalarprodukts

$$a_n = \hat{f}(n); \quad \langle f, g \rangle = \sum \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$$

$$L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f = \sum \langle f, \frac{h_n}{\|h_n\|_2} \rangle \frac{h_n}{\|h_n\|}$$

$$\langle f, g \rangle = \sum a_f(n) \overline{a_g(n)} \text{ mit } \langle f, \frac{h_n}{\|h_n\|_2} \rangle = a_f(n)$$

Satz von der Unschärfe

(i) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ außerhalb von $|x| < N$, für geeignetes N . Hat auch \hat{f} diese Eigenschaft, dann ist $\hat{f} \equiv 0$ (und damit auch f)

(ii) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\hat{f}(t)|^2 dt \geq 4\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^2$$

”Heisenberg’sche Unschärferelation”

Beweis:

(i) schriftlich!

(ii) reicht: $f \in \mathfrak{S}$

$$\int t^2 |\hat{f}(t)|^2 dt = 4\pi^2 \int |\hat{f}'|^2 dt = \int |f'|^2 dt$$

$$\left(\int t^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int |f'|^2 dt \right) \geq \left(\int |t f f'| \right)^2$$

9.11 Laplace-Transformation

Def.: da Laplace-Transfo: betrachte $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

Wenn das Integral

$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{ts} dt$$

existiert, dann heißt $\mathcal{L}f$ die Laplace-Transformation von f (an der Stelle $s \in \mathbb{C}$)

$s = 2\pi ix$; def. $f(t) = 0$ für $t < 0$. Dann ist

$$\mathcal{L}f(2\pi ix) = \hat{f}(x)$$

Bemerkung 1 (zur Existenz): Ist f messbar und gibt es reelle Zahlen M, a mit $|f(x)| \leq Me^{ax}$, dann ex. $\mathcal{L}f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > a$

$$\text{denn: } \int_0^{\infty} e^{at} e^{-ts} dt = \int_0^{\infty} e^{t(a-s)} dt \text{ ex.}$$

SATZ 1. Gibt es ein $s_0 \in \mathbb{C}$, so dass $\mathcal{L}f(s_0)$ existiert, dann ex. das Integral $\mathcal{L}f(s)$ für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$

$\inf\{\operatorname{Re} s_0 : s_0 \in \mathbb{C} : \mathcal{L}f(s_0) \text{ ex.}\} = \sigma_0(f)$, Konvergenzabzisse;

SATZ 1.

In $\operatorname{Re}(s) > \sigma(f)$ konvergiert die Laplace-Transfo;

in $\operatorname{Re}(s) < \sigma(f)$ ex. sie nicht

Gibt es zu $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ reelle M, a mit $|f(x)| \leq Me^{ax}$, dann heißt f **zulässig**.

Dann ist $\mathcal{L}f$ in $\operatorname{Re}(s) > a$ holomorph.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{L}f(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-sx} f(x) dx = - \int_0^{\infty} x f(x) e^{-sx} dx \\ &= -\mathcal{L}(xf(x))(s) \end{aligned}$$

Bis auf Skalierung sind L-Transfo für Dgl-Probleme genauso geeignet wie F-Transfos.

Vorteil: L-Transfo ex. für f mit exponentiellem Wachstum (typisch für Dgl), F-Transfo ex. nur für $f \in L^1(\mathbb{R})$ (also "klein" bei $\pm\infty$)

Nachteil: f lebt nur auf "Halbstrahl", auf $[0, \infty)$ (*nicht* typisch für Dgl).

Sind f, f' beide zulässig, dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(s) &= \int_0^{\infty} f'(x)e^{-sx} dx = f(x)e^{-sx} \Big|_{x=0}^{x=\infty} + s \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\ &= s\mathcal{L}f(s) - f(0)\end{aligned}$$

SATZ 2 (Verträglichkeit mit der Ableitung). Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ zulässig.

(i) $\frac{d}{ds}\mathcal{L}f(s) = -\mathcal{L}(xf(x))(s)$

(ii) Ist f diffbar und f' zulässig, dann ist

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$$

Beispiel 1: sei $f(x) \equiv 1$ auf $x \geq 0$. Dann ist $\mathcal{L}f$:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-sx} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{s} \text{ in } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Beispiel 2: $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(a) > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathcal{L}(x^a)(s) &= -\mathcal{L}(x^{a+1})(s) \quad \text{wegen Satz 2} \\ \int_0^{\infty} x^{a+1} e^{-sx} dx &= x^{a+1} \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_{x=0}^{x=\infty} - (a+1) \int_0^{\infty} x^a \frac{e^{-sx}}{-s} dx = \frac{a+1}{s} \mathcal{L}(x^a)(s) \\ \frac{d}{ds}f\mathcal{L}(x^a) &= -\frac{a+1}{s} \mathcal{L}(x^a)(s)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x^a)$ erfüllt die Dgl. $w'(s) = -\frac{a+1}{s}w(s)$, hat Lösung $w(s) = cs^{-(a+1)}$

Faltung (auf $[0, \infty)$ mit $+$)

$$f, g \text{ zulässig. } f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt$$

(dasselbe wie $L^1(\mathbb{R})$ -Faltung, wenn f und g durch 0 auf der negativen reellen Achse fortgesetzt werden)

SATZ 3. f, g zulässig. Dann ist auch $f * g$ zulässig, und es gilt

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s)$$

denn:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_0^x f(t)g(x-t) dt dx = \int_0^{\infty} f(t) \int_t^{\infty} g(x-t)e^{-sx} dx dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \int_0^{\infty} g(u)e^{-s(u+t)} du dt = \mathcal{L}g(s)\mathcal{L}f(s) \quad \text{mit } x-t=u\end{aligned}$$

SATZ 4 (Umkehrformel). Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ zulässig.

Dann sei $\mathcal{L}f(s)$ die Laplace-Transfo; $g(s) := \mathcal{L}f(s)$.

Sei $c \in \mathbb{R}$, dass das Integral rechts in (*) ex.; dann gilt auch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s)e^{sx} ds \quad (*)$$

$c = 0$: $e^{txi} = e^{sx}$; $s = it$

(Beweis: Fourier-Umkehrformel + Verschiebung)

SATZ 5. Seien f, g zulässig $\Leftrightarrow fg$ zulässig, und es gilt

$$\mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}(f)(w)\mathcal{L}(g)(s-w) ds$$

sobald das Integral als $L^1(\mathbb{R})$ existiert (z.B. für $\langle \rangle 1 + \max(\sigma(f), \sigma(g))$).

Die Mellin-Transfo:

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx = \int_0^{\infty} f(x)x^s \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} e^{s \log x} dx$$

Substitution $\log x = t$ führt auf L-Transfo, die auf $(-\infty, \infty)$ def. ist!

Faltung dazu lebt auf $(0, \infty)$ mit Multiplikation:

$$L^1((0, \infty)); \quad f * g(x) = \int_0^{\infty} f(y)g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}$$

$$\mathcal{M}(f * g)(s) = \mathcal{M}(f)(s)\mathcal{M}(g)(s)$$

Umkehrformel: ex. $f(x+), f(x-)$ beide, dann gilt

$$\frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}f(s)x^{-s} ds$$