**Aufgabe 141:** Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Richtigkeit der folgenden Ungleichungen:

**(a)** $e^x > 1 + x$ für $x > 0$,

**(b)** $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für $x > 0$,

**(c)** $\frac{1}{\sqrt{1+x}} > 1 - \frac{x}{2}$ für $x > 0$.

"REZEPT" für Ungleichungen aus dem MWS (Mittelwertsatz)

A. Differenzquotient:

B. MWS aufschreiben: $x_0$, $\Delta x$, $f$, $f'$ identifizieren

C. $0 < \Theta < 1$ und $x$-Intervall beachten

$\longleftrightarrow$ Ungleichung

---

b) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ f. $x > 0$

A. Idee: $1 = \sqrt{1+0}$

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+0}}{x - 0}$$

B. $x_0 + \Delta x = x$

$x_0 = 0$

$\Delta x = x$

$f(u) = \sqrt{1+u}$, $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{1+u}}$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\Theta x}}$$

C. $0 < \Theta < 1$ und $x > 0$

Also $0 < \Theta x < \infty$

$1 < 1 + \Theta x < \infty$

$1 < \sqrt{1+\Theta x} < \infty$

$2 < 2\sqrt{1+\Theta x} < \infty$

$$\boxed{\frac{1}{2} > \frac{1}{2\sqrt{1+\Theta x}} > 0}$$

$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$, also $\sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}$

$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ für $x > 0$

A'.

— " —

B'. $x_0 = 1$, $\Delta x = x$

$f(u) = \sqrt{u}$, $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+\Theta x}}$$

**Aufgabe 136:** (+) [T. Arens et al.: Mathematik, Heidelberg: 2008] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^4-6x^3+9x^2+4x-12}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

**Hinweis:** (a), (b) Polynomdivision (bei (b) mit Rest), (c) dritte binomische Formel, (d) als ein Bruch schreiben.

a) Idee A. $x=2$ einsetzen: $\left[\frac{0}{0}\right]$

unbestimmte Ausdruck

Idee B. Polynomdivision

$(x^4-2x^3-7x^2+20x-12):(x^4-6x^3+9x^2+4x-12) = 1 \ldots$

$\vdots$

Idee C. Zähler- und Nennerpolynom: Nullstelle $x=2$ abspalten, durch $(x-2)$ dividieren

Zähler $= (x^3-7x+6)(x-2) = (x^2+2x-3)(x-2)^2$

Nenner $= (x^3-4x^2+x+6)(x-2) = (x^2-2x-3)(x-2)^2$

" $\lim\limits_{x\to 2} \ldots = -\frac{5}{3}$ "

Idee D. Regel von l'Hospital anwenden:

$f'(x) = 4x^3-6x^2-14x+20$ ; $f'(2) = 0$

$g'(x) = 4x^3-18x^2+18x+4$ ; $g'(2) = 0$

$f''(x) = 12x^2-12x-14$ ; $f''(2) = 10$

$g''(x) = 12x^2-36x+18$ ; $g''(2) = -6$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(2)}{g''(2)} = \frac{10}{-6} = \underline{\underline{-\frac{5}{3}}}$$

06.04.2010

**Aufgabe 142:** Berechene Sie die folgenden Grenzwerte $G$ mit der Regel von de l'Hospital:

**(a)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$, Lösung $G = 5/3$,
**(b)** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$, Lösung $G = 1/2$,
**(c)** $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$, Lösung $G = 1$,
**(d)** $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$, Lösung $G = 0$,
**(e)** $\lim_{x\to 0+} x \ln x$, Lösung $G = 0$,
**(f)** $\lim_{x\to 0+} x^x$, Lösung $G = 1$,
**(g)** $\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$, Lösung $G = 1$.

f) $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{(\ln(x^x))} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$$

b) $$\left[\lim_{x\to 0^+}\right] \frac{e^x-1}{\sin 2x} = \frac{1+x+x^2/2+\ldots-1}{2x-8/6\,x^3+\ldots} = \frac{x+x^2/2!+\ldots}{2x-4/3\,x^3+\ldots} = \frac{1+x/2!+\ldots}{2-4/3\,x^2+\ldots}$$
$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{\sin 2x} = 1/2$$

$$\sin u = \operatorname{Im} e^{ju} = \operatorname{Im}\left(1+ju+\frac{j^2u^2}{2!}+\frac{j^3u^3}{3!}+\ldots\right) = u-u^3/6+\ldots$$

nochmal mit de l'Hospital:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

08.04.2010

**Aufgabe 147:** Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung der

**(a)** Exponentialfunktion $y = e^x$,
**(b)** Cosinusfunktion $y = \cos x$

für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}(x^2) + \frac{1}{4!}(x^4) - \frac{1}{6!}(x^6) + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l}$$

↳ $f(0)=1$ in:

$y = \cos x$
$f'(x) = -\sin x$ ; $f'(x_0=0)=0$
$f''(x) = -\cos x$ ; $f''(x_0=0)=-1$
$\vdots$

09.04.2010

**Aufgabe 157:** Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \cdot \ln(1+x)}.$$

**(a)** Mit Hilfe der Regel von de l'Hospital.

**(b)** Mit Hilfe der Taylorschen Formel für die Funktionen $y = \sin x$, $y = \arctan x$ und $y = \ln(1+x)$ am Entwicklungspunkt $x_0 = 0$; drücken Sie die Restglieder jeweils mit dem Landau-Symbol aus.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)} \frac{x^k}{k}$$

---

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots$$

---

b)

$$\frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \ln(1+x)} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{23}{120}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \ldots} = \frac{1/6 - 23/120\, x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{2}x + \ldots}$$

$$\lim_{x\to 0} \ldots = 1/6$$

13.04.2010

**Aufgabe 154:** Schätzen Sie den Fehler der Formel

$$e \approx \underbrace{2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}}_{2{,}708}$$

ab.

Überlegung: $e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$ | $e = e^1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \boxed{\sum_{l=5}^{\infty} \frac{1}{l!}}$$

$$\text{Fehler} = \sum_{l=5}^{\infty} \frac{1}{l!}$$

Gesucht: $|\text{Fehler}| \leq E$ ← „Zahl"

Abschätzung: $|\text{Fehler}| \leq E$ $\iff$ $-E \leq \text{Fehler} \leq E$

Faustformel: (siehe nächste Seite)

$$\text{Fehler} \approx \underbrace{\frac{1}{5!}}_{\approx 0{,}0083}$$

??

$e - 2{,}708 = 0{,}01$ rel. Fehler etwa 20%

Schlüssel zur Lösung:

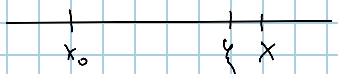
$$\boxed{\text{Taylorsche Formel mit Restglied:}\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

$0<\Theta<1$

$n \in \mathbb{N}$

$$R_{n+1}(x) := \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\xi$ zwischen $x$ und $x_0$




Lagrangesches Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad\Bigg|\quad = \sum_{l=n+1}^{\infty} \frac{f^{(l)}(x_0)}{l!}(x-x_0)^l$$

falls $f$ Potenzreihe besitzt

$\ominus$ $\xi$ unbekannt | $\ominus$ unendliche Reihe

Anmerkungen:

1. für $n=0$: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0+\Theta(x-x_0))(x-x_0)$

   $\Delta x := x - x_0$, also $x = x_0 + \Delta x$

   $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\Theta\Delta x)\Delta x$

   MWS der Diff.rechnung

2. Beweis mit MWS (Skript)

3. FAUSTFORMEL

   $$R_{n+1}(x) \approx \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

   i.W.

   $R_{n+1}$ ungefähr nächstes Reihenglied

------

Weiter zur Lsg.:

$$\text{Fehler} = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(\overset{x}{1}-\underset{x_0}{0})^5$$

$\xi$ zwischen $0$ und $1$

$$\text{Fehler} = \frac{e^{\xi}}{5!},\quad 0<\xi<1 \qquad \left(= \sum_{l=5}^{\infty} \frac{1}{l!}\right)$$

$$\frac{1}{5!} = \frac{e^0}{5!} < \frac{e^{\xi}}{5!} < \frac{e}{5!}$$

$$\left|\frac{e^{\xi}}{5!}\right| < \frac{e}{5!} = \varepsilon \qquad \boxed{|\text{Fehler}| \leq \frac{e}{5!}}$$

Zahlen: $\frac{e}{5!} \approx 0{,}023$

$e - 2{,}708 = 0{,}01 \leq 0{,}023$



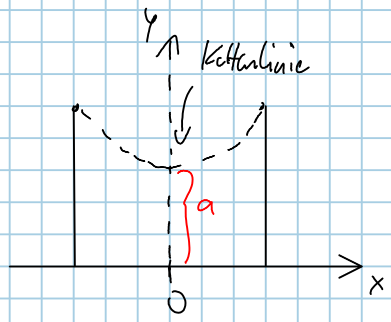
**Aufgabe 155:** Zeigen Sie, daß die *Kettenlinie*

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

für $|x| \leq a$ näherungsweise durch die Parabel

$$y = a + \frac{x^2}{2a}$$

ersetzt werden kann[iii]. Schätzen Sie den Fehler ab.




$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (= f(x))$

Taylor: $f(0) = a$

$f'(x) = a\cosh'\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

$= a\sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

$= \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$

$f'(0) = 0$

$f''(x) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}$

$f''(0) = 1/a$

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + R_3(x)$

$R_3(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6} \cdot x^3 = \frac{\sinh(\xi/a)}{6a^2} x^3$

$f(x) = a + \frac{1}{2a}x^2 + \frac{\sinh(\xi/a)}{6a^2} x^3$

$|x| \leq a$, $\xi$ zwischen $0$ und $x$

Zusammenhang $\cosh$ / $\cos$

$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$jx = z \iff x = -jz$

$\cos(jz) = \cos(-jz) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$= \cosh(z)$

$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\cosh' z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (=: \sinh z)$

$\cosh'' z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(z)$

$\cosh''' z = \sinh z$

$f(x) = a + \frac{1}{2a}x^2 + \frac{\sinh\left(\xi/a\right)}{6a^2} x^3$

Fehler

$\xi$ zwischen $0$ und $x$

$a \quad 0 \quad \xi \quad x \quad a \qquad a \quad x \quad \xi \quad 0 \quad a$

Auch $|\xi| \leq a$

$\varepsilon :=$ Fehler $= \frac{\sinh(\xi/a)}{6a^2} x^3$

$|\varepsilon| = 1/6 \;\; |\sinh(\xi/a)| \;\; \frac{|x|^3}{a^2}$

$|\varepsilon| \leq 1/6 \; a \cdot |\sinh(\xi/a)| \; ; \quad |\xi/a| \leq 1$

$|\varepsilon| \leq \frac{a}{6} \frac{e - 1/e}{2}$ Absoluter Fehler

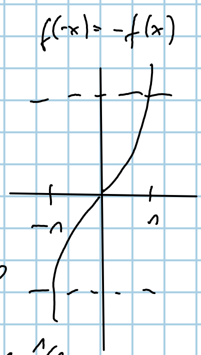
$|\sinh(z)| \leq \dots ?$

$|z| \leq 1$

$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\sinh' z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} > 0$

$|\sinh(z)| \leq \sinh 1 = \frac{e - 1/e}{2}$



13.04.2010

Rel. Fehler: $\frac{\varepsilon}{f(x)} =: \varepsilon_r$

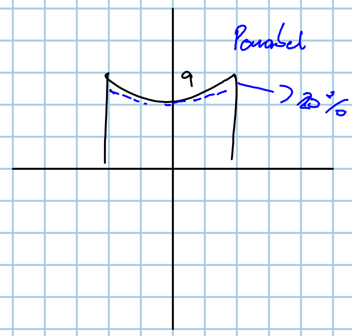
$\varepsilon_r \leq \frac{|\varepsilon|}{a} \leq \frac{e-\sqrt{e}}{12}$

$\varepsilon_r$ (relativer Fehler)

$\varepsilon_r := \frac{\varepsilon}{f(x)}$

$|\varepsilon_r| \leq \frac{|\varepsilon|}{a}$ (weil $f(x) \geq a$)

$|\varepsilon_r| \leq \frac{e-\sqrt{e}}{12} \approx 20\,\%$




15.04.2010

Aufgabe

Schreiben Sie ein C-Programm

```
# include <stdio.h>
        :
double f1 (double x)
{
    :            <- füllen
}          f2, f3, f4
typedef double (*fp)(double);
double riemann (N, a, b, fp)
{
   /* fp (7)   */        (int N, double a, double b,   fp f)
}
int main (int argc, char *argv[])
{
   double a = 1.0;
   double b = 11.0;
   int N = 100;
   ...riemann (N, a, b, f1);
   -> Ausgeben   f2, f3, ...
```

N:

Zerlegung:

a ... b

$\Delta x_i = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + i\,\Delta x_i$

$\xi_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$

$\sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

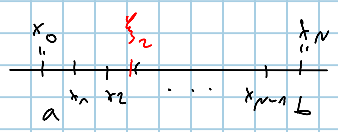
04.05.2010

**Aufgabe 177:** Berechnen Sie das Integral $\int_a^b x\,dx$ mittels des Grenzübergangs $\mathcal{Z} \to \infty$ aus einer geeigneten *Riemann-Summe*. Hinweise:

1. Wählen Sie die Zwischenpunkte $\xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$.
2. Beachten Sie $(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$.
3. Eine *Teleskopsumme* läßt sich leicht berechnen:

$$\sum_{i=0}^{N-1}(q_{i+1}-q_i) = q_1 - q_0 + q_2 - q_1 + \cdots + q_N - q_{N-1} = q_N - q_0.$$

$$\int_a^b x\,dx$$




N Teile, also

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

$$= a + i \cdot \frac{b-a}{N}$$

Aufgabenstellung

$$\xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} = x_i + \frac{\Delta x}{2}$$

$$= a + i \cdot \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{2N}$$

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i \cdot \Delta x_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left[a + i \cdot \frac{b-a}{N} + \frac{b-a}{2N}\right] \cdot \frac{b-a}{N}$$

Weiterrechnen $\longrightarrow$ und $\sum_{i=0}^{N-1} i = \frac{N\cdot(N-1)}{2}$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i}$$

---

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \xi_i\,\Delta x_i = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\,(x_{i+1}-x_i)$$

$(u+v)(u-v) = u^2 - v^2$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[x_{i+1}^2 - x_i^2\right]$$

Tipp: $\sum_{i=0}^{N-1} \left[q_{i+1} - q_i\right] = q_1 - q_0 + q_2 - q_1 + q_3 - q_2 + \dots + q_N - q_{N-1}$

$$= q_N - q_0$$

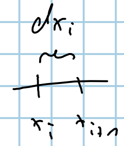
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_N^2 - x_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

04.05.2010

Warum:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad ! \quad dF(x) = F(x+dx) - F(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dF(x) = \sum_i \left[F(\underbrace{x_i + dx_i}_{= x_{i+1}}) - F(x_i)\right]$$




**Aufgabe 179:** Es ist

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ermitteln Sie aus diesem Ausdruck die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung von $y = \arcsin x$ indem Sie die Taylorreihe von $y = (1+x)^r$, nämlich (Binomialreihe!)

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} + \cdots$$

einsetzen.

$$y = \arcsin(x) : \quad y' : \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x = \sin y$

$$\arcsin x = \arcsin 0 + \int_0^x \arcsin'(t)\,dt$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt$$

$F = \arcsin$, $a = 0$, $b = x$

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Binomialreihe:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 - \tfrac{1}{2}(-t^2) + \frac{3}{8}(-t^2)^2 + \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \ldots$$

$$\arcsin(x) = \int_0^x \left[1 + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{8}t^4 + \ldots\right] dt$$

$$= x + \tfrac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}t^5 + \ldots$$

**Aufgabe 195:** Man löse das integral $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$ mit der Substitution $x = \sin u$.

$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x^2} \neq \pm x$

$x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$

$dx = \sin'(u)du \quad = \cos u \; du$

$I = \int \sin(u) \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\sqrt{\cos^2 u}} \cdot \cos u \, du$

$I = \int \sin(u) \, |\cos u| \cos u \; du$

$= \int |\cos u| \cos u \sin u \; du$

$\sin u \; du = -\frac{d\cos u}{du} \; du \quad = d(\cos u)$

$z = \cos u$

$dz = -\sin u \; du$

$I = \int |z| z \; (-dz) \quad = -\int |z| z \, dz$

$z > 0$:

$I = -\int z^2 dz = -\frac{1}{3} z^3 + C$

Rücksubstitution: (1)

$I = -1/3 \, (\cos \quad = -\frac{1}{3}\cos^3 u + C$

Rücksubst. (2): $\cos u = \sqrt{1-\sin^2 u}$

$I = -\frac{1}{3} (1-\sin^2 u)^{3/2} + C$

$= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C$

$z < 0$:

$I = -1/3 (1-x^2)^{3/2} + C$

Test: $I' = -\frac{1}{2} (1-x^2)^{1/2} (-2x)$

$= x(1-x^2)^{1/2}$

$I = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \quad = \int \sqrt{1-x^2}\, x \, dx$

$\frac{dx^2}{dx} = 2x$

$x\,dx = \frac{1}{2} d(x^2)$

Subst.: $u = x^2$

$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-u}\; du$

$1-u = z$

$du = -dz$

$I = \frac{1}{2} \int \sqrt{z}\,(-dz) = -\frac{1}{2}\int \sqrt{z}\; dz$

$= -\frac{1}{2}\int z^{1/2} dz$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{3/2} + C$

**(*)Aufgabe 200:** Machen Sie sich mit folgenden Schritten klar, daß der Satz von Schwarz für eine große Klasse von Funktionen richtig sein muß. Zeigen Sie nacheinander:

1. Der Satz gilt für die Koordinatenfunktionen $f = f(x, y) = x$ und $f = f(x, y) = y$.
2. Gilt der Satz für $f_1 = f_1(x, y)$ und $f_2 = f_2(x, y)$, so ist er auch für die zusammengesetzten Funktionen
   (a) $f = f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$,
   (b) $f = f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y)$
   gültig.
3. Gilt der Satz für $f = f(x, y)$ und ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige (differenzierbare) Funktion *einer* reellen Variablen (z.B. $\varphi(u) = \exp(u)$), dann gilt der Satz auch für die zusammengesetzte Funktion $g = g(x, y) = \varphi(f(x, y))$.

Damit haben Sie nachgewiesen, daß der Satz von Schwarz für alle in dieser Art zusammengesetzten Funktionen wie z.B.

$$h = h(x, y) = \frac{\exp(x + 3\ln(y))}{\sin(y\ln(cos(x))) + 2}$$

gilt.

Wie setzen wir Funktionen zusammen?

(1) * Addition

(2) * Multiplizieren

(3) * Einsetzen in "einvariablige" Funktion $u = \varphi(x)$

Ausgangsfunktion waren $f_1(x,y) = x$
$f_2(x,y) = y$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0$$

Teil 2b)

Nachrechnen: Gilt der Satz von Schwarz für $f_1$ und $f_2$, dann gilt er auch für $f(x,y) = f_1(x,y) * f_2(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x} + f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}$$

" $\quad$ " $\quad$ "

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} + f_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} + f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}$$

Aufgabe: Weisen Sie nach, dass jede Funktion $u = u(x,t)$, der Form

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

erfüllt.

1. Ableitungen

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$(\mathrm{I})\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x-ct) + g(x+ct)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x-ct)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[g(x+ct)\right]$$

$$= f'(x-ct)\cdot(-c) + g'(x+ct)\cdot c$$

$$(\mathrm{II})\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-c)\frac{\partial}{\partial t}\left[f'(x-ct)\right] + c\frac{\partial}{\partial t}\left[g'(x+ct)\right]$$

$$= (-c)\, f''(x-ct)(-c) + c\, g''(x+ct)\cdot c$$

$$= c^2\left[f''(x-ct) + g''(x+ct)\right]$$

(b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: "analog (z. Hause)"

$$= f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

2. Aha - Erlebnis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

3. $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Part. Differentialgleichung

Beispiel $f(u) = \cos u$

$g(u) = 0$

$$u(x,t) = \cos(x-ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos'(x-ct)\cdot(-c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cos''(x-ct)(-c)(-c)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

**Aufgabe 204:** Das Volumen eines Zylinders mit Radius $r$ und Höhe $h$ ist $V = \pi r^2 h$. Also ist $V = V(r,h)$ eine Funktion der beiden Variablen $r$ und $h$. Bei einem Zylinder mit dem Radius $4cm$ und der Höhe $40cm$ wird der Radius $r$ um $\Delta r = 1mm$ und die Höhe um $\Delta h = 2mm$ vergrößert.

**(a)** Berechnen Sie die Volumenänderung $\Delta V$ aus der Definition

$$\Delta V(r,h,\Delta r,\Delta h) = V(r+\Delta r, h+\Delta h) - V(r,h)$$

**(b)** Berechnen Sie das totale Differential $dV$

**(c)** Für kleine Änderungen $\Delta r$ und $\Delta h$ ($\left|\frac{\Delta r}{r}\right| \ll 1$, $\left|\frac{\Delta h}{h}\right| \ll 1$) ist die Näherung

$$\Delta V(r,h,\Delta r,\Delta h) \approx dV(r,h,dr=\Delta r, dh=\Delta h)$$

zulässig. Berechnen Sie mit dieser Näherung die Volumenänderung $\Delta V$.

Zulässig, weil $\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{40} = 2{,}5\%$

$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{200} = 0{,}5\%$

a) ..

b) ..

c) Näherungswert für $\Delta V$:

$\Delta V \approx dV$ wobei $dh = \Delta h$

$dr = \Delta r$

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = 2\frac{dr}{r} + \frac{dh}{h} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

Also $\frac{\Delta V}{V} \approx 2 \cdot \frac{1}{40} + \frac{1}{200} = \frac{1}{20} + \frac{1}{200} = \frac{11}{200}$

$\rightarrow \Delta V \approx \underbrace{\frac{11}{200} \cdot V}_{110{,}58} \approx 110\,cm^3$

Hier: $\Delta V - dV = 111{,}35\,cm^3 - 110{,}58\,cm^3 \approx 1\,cm^3 = O_2(\Delta r, \Delta h)$

* $dV$ nähert $\Delta V$ an

$df$ Näherung für $\Delta f$ ("kleine $\Delta x_i$") für $|\Delta x_i / x_i| \ll 1$

* Totales Differential zur Berechnung der Fehlerfortpflanzung

**Aufgabe 205:** Bei der Serienschaltung von $N$ Widerständen $R_i$ wird der Gesamtwiderstand $R$ aus

$$R = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

berechnet. Der relative Fehler $\frac{dR_i}{R_i}$ habe für alle $R_i$ den kleinen Wert $\epsilon$. Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials den relativen Fehler von $R$, also $\frac{dR}{R}$.

Serienschaltung:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Toleranz: $\left| \frac{dR_i}{R_i} \right| \leq \varepsilon$

Relativer Fehler von $R$: $\frac{dR}{R}$

$$dR = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial R_i} \, dR_i$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_i} = 1$$

$R = R_1 + R_2 + R_3$

$\frac{\partial R}{\partial R_3} = 1$

$\frac{\partial R}{\partial R_2} = 1$

$\frac{\partial R}{\partial R_1} = 1$

$$dR = \sum_{i=1}^{n} dR_i = \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{dR_i}{R_i}$$

$$|dR| = \left| \sum_{i=1}^{n} R_i \frac{dR}{R_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} R_i \left| \frac{dR_i}{R_i} \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} R_i = \varepsilon R, \quad \text{Also: } \left| \frac{dR}{R} \right| \leq \varepsilon$$

Parallel:

$$\frac{\partial R}{\partial G_i} = \frac{\partial}{\partial G_i} \left( \sum_{l=1}^{n} G_l \right)^{-1} = (-1) \left( \sum_{l=1}^{n} G_l \right)^{-2} \cdot 1$$

$$= (-1) \frac{1}{\left( \sum_{l=1}^{n} G_l \right)^2} = (-1) \frac{1}{G^2}$$

$$\frac{dG_i}{dR_i} = \frac{d}{dR_i} \left( \frac{1}{R_i} \right) = -\frac{1}{R_i^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_i} = \frac{\partial R}{\partial G_i} \cdot \frac{dG_i}{dR_i} = \frac{1}{G^2} \frac{1}{R_i^2}$$

$$dR = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial R_i} dR_i = \frac{1}{G^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \frac{dR_i}{R_i}$$

$$|dR| \leq \frac{1}{G^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \left| \frac{dR_i}{R_i} \right| \leq \frac{1}{G^2} \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}_{G} = \frac{\varepsilon}{G}$$

$$|dR| \leq \frac{\varepsilon}{G}$$

$$\left| \frac{dR}{R} \right| \leq \varepsilon \frac{1}{R \cdot G} = \varepsilon$$

Berechnen Sie $\frac{dz}{dx}$ wenn

$$z = u^v \quad , u = u(x) \qquad v = v(x)$$

$$z = z(u,v) = u^v$$

$$z = z(u(x), v(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

$$z = u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v\ln(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{v\ln(u)} \cdot \frac{v}{u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = e^{v\ln(u)} \cdot \ln(u)$$

$$= u^{v-1} \cdot v \qquad = u^v \cdot \ln(u)$$

$$\frac{dz}{dx} = v \cdot u^{v-1} u'(x) + u^v \cdot \ln(u) \cdot v'(x)$$

$$z = x^y \quad , y = y(x)$$

$$z = z(x,y) = z(x, y(x))$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'(x)}$$

$$z = x^y = e^{y\ln x} \quad : \frac{\partial z}{\partial x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = y x^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x$$

$$\frac{dz}{dx} = y x^{y-1} + x^y \cdot \ln(x)\, y'$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=\text{const}} \qquad \frac{dz}{dx}$$

$$y(x) = x^2$$

$$z = x^y = x^{x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1} = x^{(x^2+1)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d}{dx} e^{x^2 \ln x} = x^{x^2}\left[2x\ln x + x\right]$$

25.05.2010

# Aufgabe 27

b) $f(x,y) = y^x$

Entwickeln um $x=2,\ y=1$ und Berechnung von $1{,}1^{2{,}1}$

$x_0 = 2 \quad , \quad y_0 = 1$

| | allg. | $(x,y)=(2,1)$ |
|---|---|---|
| $f$ | $e^{x\ln y}$ | $1$ |
| $f_x$ | $y^x \ln y$ | $0$ |
| $f_y$ | $xy^{x-1}$ | $2$ |
| $f_{xx}$ | $y^x(\ln y)^2$ | $0$ |
| $f_{yy}$ | $x(x-1)\,y^{x-2}$ | $2$ |
| $f_{xy}$ | $(x\ln y+1)\,y^{x-1}$ | $1$ |
| $f_{yx}$ | — " — | $1$ |

$y^x = e^{x\ln y}$

$f_x = e^{x\ln y}\cdot \ln y = y^x \ln y$

$f_y = e^{x\ln y}\cdot \frac{x}{y} = xy^{x-1}$

$f_{xx} = e^{x\ln y}\cdot(\ln y)^2 = y^x(\ln y)^2$

$f_{yy} = x(x-1)\,y^{x-2}$

$f_{xy} = xy^{x-1}\ln y + y^{x-1} = (x\ln y+1)\,y^{x-1}$

$f_{yx} = e^{x\ln y}\cdot \ln y\cdot\frac{x}{y} + e^{x\ln y}\cdot \frac{1}{y}$

$= y^{x-1}\cdot \ln y\, x + y^{x-1} = (x\ln y+1)\,y^{x-1}$

$$y^x = \underset{f(x_0,y_0)}{1} + \underset{f_y(y-y_0)}{2(y-1)} + \underset{\frac{1}{2}f_{yy}(y-y_0)^2}{(y-1)^2} + \underset{f_{xy}\,(x-x_0)(y-y_0)}{(x-2)(y-1)} + O_3\,(x-2,\,y-1)$$

$1{,}1^{2{,}1} = 1 + 2\cdot 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}1\cdot 0{,}1 + O_3 \ \ldots$

$= 1{,}22$

TR: $1{,}2215$

rel. Fehler: $1‰$

# Aufgabe 28

$z(x,y)$ ist durch $z^3 - 2xz + y = 0$ implizit definiert

Wir wissen: für $x=y=1$: $z^3(1,1) - 2z(1,1) + 1 = 0$

$z(1,1) = 1$

$z(x,y)$ durch Taylorreihenentwicklung um $(x_0,y_0) = (1,1)$ berechnen

$z^2 - 2xz + y = 0$

$z_{1/2} = x \pm \sqrt{x^2 - y}$

Lösung ist $z = z(x,y)$

Wir erwarten: $z^3 - 2\cdot 0{,}9z + 0{,}8 = 0$

$z \approx 1 \ \leadsto\ z = 1{,}27$

$z_x,\ z_y,\ z_{yy},\ z_{xx},\ z_{xy}$ ↯

$z^3(x,y) - 2xz\,(x,y) + y = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}: \; 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2z - 2x \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2-2x}$

$\frac{\partial}{\partial y}: \; 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$ $\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-1}{3z^2-2x}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2z}{3z^2-2x}\right) = \frac{2\,\frac{\partial z}{\partial x}(3z^2-2x) - \left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right)2z}{(3z^2-2x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - vu'}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{(3z^2-2x)^2} \cdot 6z\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(3z^2-2x)^2} \cdot \left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right)$$

$x_0 = 1 \;, \; y_0 = 1$

| | |
|---|---|
| $z$ | $1$ |
| $z_x$ | $2$ |
| $z_y$ | $-1$ |
| $z_{xx}$ | $-16$ |
| $z_{yy}$ | $-6$ |
| $z_{xy}$ | $10$ |

$$z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) + \sigma_3(x-1, y-1)$$

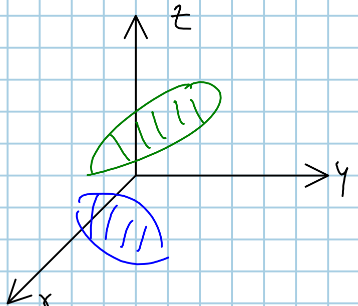
Bsp.: $x = 0{,}9 \;;\; y = 0{,}8 \;;\; x-1 = -0{,}1$
$y - 1 = -0{,}2$

$z = 1 - 0{,}2 + 0{,}2$
$- 8 \cdot 0{,}01 - 3 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 1 - 0{,}08 - 0{,}12 + 0{,}2 = 1 + \ldots$

---

$z(2,2) = ?$ $\qquad -2{,}21 \;;\; 1{,}67$

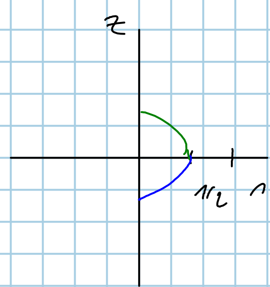
$z^3 - 4z + 2 = 0$



$z^2 + 2x - 1$

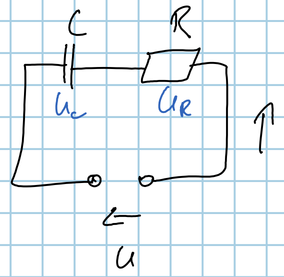
$z^2 = 1 - 2x$

$z = \pm\sqrt{1-2x}$



08.06.2010

Aufgabe 233)




Bestimmen Sie $Q = Q(t)$

$Q(0) = 0$

Hinweis:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = I_C$$

(1) $U = U_C + U_R$

(2) $I = I_C = I_R$

(3) $U_R = I_R \cdot R = IR$

(4) $U_C = Q \cdot \frac{1}{C}$

(4), (3) in (1)

$$U = \frac{Q}{C} + IR$$

$$\frac{d}{dt} U = 0 = \frac{d}{dt} \left( Q/C + IR \right)$$

$$0 = \frac{I}{C} + \dot{I} R$$

$$\dot{I} + \frac{1}{RC} I = 0$$

$$U = \frac{Q}{C} + I \cdot R = \frac{Q}{C} + \dot{Q} \cdot R$$

$$\dot{Q} = -\frac{Q}{RC} + \frac{U}{R}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} + \frac{U}{R}}$$

Frage: Wie ist $Q = Q(t)$?

$Q(0) = 0$

Annahme: $U = \text{const}$

Trennung der Variablen: $Q, t$

$$dQ = \left[ -\frac{Q}{R \cdot C} + \frac{U}{R} \right] \cdot dt \qquad | : [\ldots]$$

$$\frac{dQ}{Q/RC - U/R} = -dt$$

$$\frac{R \cdot C \; dQ}{Q - U C} = -dt$$

$$\boxed{\frac{dQ}{Q - U \cdot C} = -\frac{1}{RC} \cdot dt}$$

$$\int \frac{dQ}{Q - UC} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln |Q - UC| = -\frac{t}{RC} + \text{const}$$

$$|Q - UC| = \text{const} \cdot e^{-t/(R\cdot C)}$$

$$Q = UC - \text{const} \cdot e^{-t/RC}$$

$$Q(0) = 0: \quad U\cdot C - \text{const} = 0$$

$$Q(t) = U\cdot C\,(1 - e^{-t/RC})$$

Aufgabe 229)

c) $y' = 1 - y^2$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \qquad \text{TdV: } \frac{dy}{1-y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{(1-y)(1+y)} \overset{!}{=} \frac{A}{1-y} + \frac{B}{1+y} \qquad |\,(1+y)(1-y)$$

$$1 = A(1+y) + B(1-y)$$

$$= A + B + y(A - B)$$

Koeffizientenvgl.: $\left.\begin{matrix} A-B = 0 \\ A+B = 1 \end{matrix}\right\} A = B = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y}$$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\cdot(-1) \ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y| + c \qquad \Big|\ \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + c$$

Lsg: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + c$

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \exp(2x + 2c)$$

$$\frac{1+y}{1-y} = ce^{2x}$$

$$1 + y = (1-y)\,ce^{2x}$$

$$1 - ce^{2x} = -y\,(1 + ce^{2x})$$

$$y = \frac{ce^{2x} - 1}{ce^{2x} + 1}$$

08.06.2010

28| $z(x,y)$:

$$z^3 - 2xz + y = 0$$

$\underline{x}=\underline{1}, \underline{y}=\underline{1}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ $x_0 = 1$

$x - x_0$ $\quad y - y_0$ $\quad y_0 = 1$

$$z(x,y) = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} z_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{2} z_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + z_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \sigma_3(x-x_0, y-y_0)$$

---

$x_0 = 1, \quad y_0 = 1$

$$z^3 - 2z + 1 = 0$$

$$z(1,1) = 1$$

$$z^3 - 2xz + y = 0$$

$\frac{d}{dx}$: $3z^2 z_x - 2z - 2x z_x = 0$

$$z_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x} \leadsto z_x(1,1) = \frac{2}{3-2} = 2$$

$\frac{d}{dy}$: $3z^2 z_y - 2x z_y + 1 = 0$

$$z_y = \frac{-1}{3z^2 - 2x} \leadsto z_y(1,1) = -1$$

---

$$3z^2 z_x - 2z - 2x z_x = 0$$

$\frac{d}{dy}$: $3 \cdot 2z z_y z_x + 3z^2 z_{xy} - 2z_y - 2x z_{xy} = 0$

$$z_{xy} = \frac{2z_y - 6z z_y z_x}{3z^2 - 2x}$$

$$z_{xy}(1,1) = \frac{2(-1) - 6 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 10$$

$$z(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) + \sigma_2(x-1, y-1)$$

* Taylorentwicklung
* L'Hospital
* (Mittelwert)
* Integration
* Totales Differential
* Taylor mit mehreren Variablen
* "implizites Differenzieren"
* DGL: Trennung d. Variablen

## Aufgabe 194

$$\int \frac{2-x}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

$u = 1+\sqrt{x}$

$x = (u-1)^2$

$dx = 2(u-1)\,du \quad ; \; dx = \frac{dx}{du}\,du$

$$\boxed{\int \frac{2-(u-1)^2}{u}\cdot 2(u-1)\,du = I}$$

$$I = \int \frac{2-u^2-1+2u}{u}\cdot 2(u-1)\,du = 2\int \frac{(1-u^2+2u)(u-1)}{u}\,du$$

$$= 2\int \frac{u-1-u^3+u^2+2u^2-2u}{u}\,du = 2\int \left(-u^2+3u-1-\frac{1}{u}\right)du$$

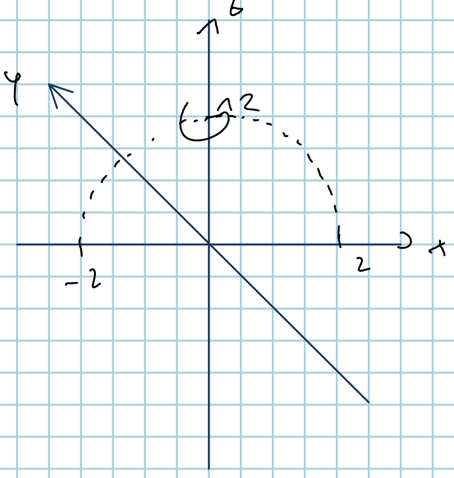
$$= 2\left[\frac{-1}{3}u^3+\frac{3}{2}u^2-u-\ln|u|\right]$$

Rücksubst.:

$$I = \frac{-2}{3}(1+\sqrt{x})^3+3(1+\sqrt{x})^2-2(1+\sqrt{x})-2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

## Aufgabe 199)

$z = \sqrt{4-x^2} \quad ; \; z^2+x^2=4$




$\underbrace{x:\text{ Abstand zur } z\text{-Achse}}_{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z = \sqrt{4-[x^2+y^2]}$

$z^2+x^2+y^2=4 \; , \; z \geq 0$