

# 1. Literatur

---

- vgl. Anlage
- Buch 2 "sehr gut"
- Buch 3 "feine Sache", "sehr gut"
- Buch 12 "wirklich gut"

"Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung sind toll... braucht's aber net." - Schreiber

# 2. Grunddefinitionen nach DIN 1319

---

vgl. Anlage

# 3. Begriffe nach VDE 0410

---

vgl. Anlage

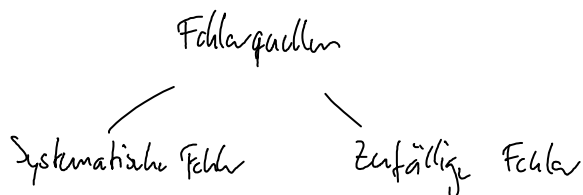
# 4. Messfehler

---

## 4.1 Fehlerquellen, Fehlerarten

- **Gerätefehler**: Unvollkommenheit der Konstruktion, der Fertigung und der Justierung der Messgeräte, der Maßwertkopparung und des Messgegenstandes
- **Einflussfehler**: Temperatur, Luftdruck, Feuchtigkeit, Frequenz, elektrische und magnetische Felder
- **Verfahrensfehler**: Messverfahren, Messanordnung
- **Personliche Fehler**: Eigenschaften und Fähigkeiten des Beobachters

16.10.2009



## 4.2 Systematische Fehler

### 4.2.1 Absolute Fehler

$$F = \text{Istwert} - \text{Sollwert}$$

$$F = \text{angezeigter Wert} - \text{wahrer Wert} \leadsto F = x_A - x_w$$

$x_w$  ... Wert eines fehlerfreien (genauen) Instruments

$x_w$  ... Vergleichswert mit einem Normal

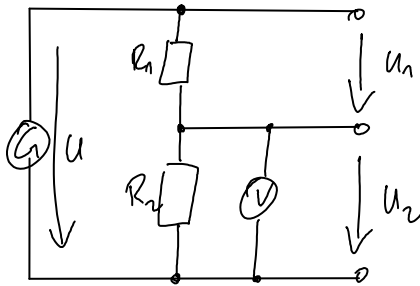
$x_w$  ... Wert einer exakten Berechnung

### 4.2.2 Relativer Fehler (nach DIN)

Ideale Definition:

$$F_r = \frac{x_A - x_w}{x_w} \cdot 100\% = \frac{F}{x_w} \cdot 100\%$$

z.B.:



$$U = 30V, R_1 = 20\Omega$$

$$R_2 = 10\Omega, U_2 = ?$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$U_2 = \frac{10\Omega}{20\Omega} \cdot 30V = 15V$$

$$U_{zw} = 15V$$

$$U_{zA} = 9V$$

$$F = 9V - 10V = -0,1V$$

$$F_r = \frac{-0,1V}{10V} \cdot 100\% = -1\%$$

### 4.2.3 Klassenfehler bei Messinstrumenten

$$F_{rK} = \pm \frac{x - x_w}{x_E} \cdot 100\% \quad \dots \text{Relativer Klassenfehler}$$

$x_E$  ... Skaleneinheit

Klasseneinteilung ( $F_{rK}$  in %):

a) Fehlermessgeräte: 0,1; 0,2; 0,5;

b) Betriebsmesser: 1,0; 1,5; 2,5; 5,0; 10,0

$$F_{rK} = \pm \frac{F}{x_E}; \quad \boxed{F = \pm F_{rK} \cdot x_E}$$

z.B.: Klasse 0,5 ;  $V_E = 500V$  ,  $V_E = 100V$

$$F = \pm 0,5\% \cdot 500V$$

$$F_{500} = \pm 0,5\% \cdot 500V = \pm 2,5V$$

$$F_{100} = \pm 0,5\% \cdot 100V = \pm 0,5V$$

#### 4.2.4 Relative Messfehler (nach VDE)

Mit  $x_A \approx x_V$

$$\rightarrow F_{r,m} = \pm \frac{x_A - x_V}{x_A} \cdot 100\% = \pm \frac{F}{x_A} \cdot 100\%$$

$$F = 0,1V \quad x_V = 10V \quad x_A = 5,9V$$

$$F_{r,DIN} = - \frac{0,1V}{10V} \cdot 100\% = -1\%$$

$$F_{r,m} = - \frac{0,1V}{5,9V} \cdot 100\% = -1,01\%$$

30.10.2009

Beispiel: Messinstrument

Klasse 0,5 , MB 0-500V

$$U_A = 27V$$

$$F = \pm 500V \cdot 0,5\% = \pm 2,5V$$

$$F_{r,m} = \pm \frac{2,5V}{27V} \cdot 100\% = \pm 9,26\%$$

#### 4.3 Zufällig Fehler

##### 4.3.1 Linearer, arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Messreihe } x_1, x_2, x_3, \dots$$

##### 4.3.2 Durchschnittliche Abweichung, Durchschnittliche Fehler

$$\begin{aligned} \text{Einzelabweichungen } \delta_1 &= x_1 - \bar{x} \\ \delta_2 &= x_2 - \bar{x} \dots \end{aligned}$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\delta_i|$$

Werte einer Stichprobe:

Probe 1: 12, 15, 15, 20, 20, 20, 21, 21, 28

Probe 2: 14, 18, 18, 20, 20, 20, 22, 22, 26

$$\bar{x}_1 = 20, \quad \bar{x}_2 = 20$$

$$s_1 = \frac{20}{3}, \quad s_2 = \frac{20}{3}$$

### 4.3.3 Standardabweichung $S$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n s_i^2}$$

Messergebnis der Messreihe:

$$x_w = \bar{x} \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot S$$

$t$  = Vertrauensfaktor

$n$  = Anzahl der Messwerte

$$\frac{t}{\sqrt{n}} \cdot S = v \quad \begin{array}{l} \text{Vertrauensbereich} \\ \text{Vertrauensgrenze} \end{array}$$

Gesamtergebnis:

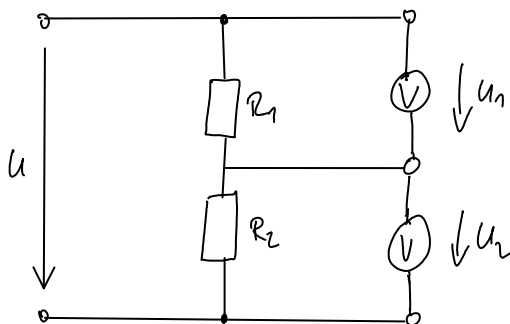
$$x_w = \bar{x} \pm \left( \underbrace{\frac{t}{\sqrt{n}} S}_v + |F| \right)$$

$$x_w = \bar{x} \pm u$$

$u$  ... Messunsicherheit

## 4.4 Fehlerfortpflanzung

### 4.4.1 Fehler aus der Summe zweier Messgrößen



$$U = ? = U_1 + U_2$$

$$U_{1w} = U_{1A} \pm \Delta U_1$$

$$U_{2w} = U_{2A} \pm \Delta U_2$$

$$U_w = U_{1A} \pm \Delta U_1 + U_{2A} \pm \Delta U_2$$

$$U_w = U_{1A} + U_{2A} \pm (\Delta U_1 + \Delta U_2)$$

Bei der Summenbildung addieren sich die Fehler.

$$F_{\text{ges}} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots$$

Beispiel: Entsprechend obiger Schaltung soll die Spannung  $U$  auf 2 Arten ermittelt werden:

a) direkt im 100V-Messbereich

b) als Summe zweier Teilspannungen im 30V-Messbereich

Welche Messung ergibt das genauere Ergebnis, wenn in beiden Fällen der relative Messfehler  $F_{\text{rel}} = 1,0\%$  beträgt?

a)  $U = 45\text{V}$

b)  $U_1 = 15\text{V}$ ,  $U_2 = 30\text{V}$

Lsg.: a)  $F = \pm 100\text{V} \cdot 1\% = \pm 1\text{V}$

$$U = 45\text{V}$$

$$F_{\text{rel}} = \pm \frac{1\text{V}}{45\text{V}} \cdot 100\% = \pm 2,2\%$$

b)  $F_1 = F_2 = \pm 30\text{V} \cdot 1\% = \pm 0,3\text{V}$

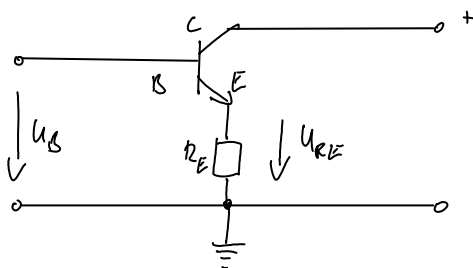
$$F = \pm 0,6\text{V}$$

$$U = 45\text{V} \pm 0,6\text{V}$$

$$F_{\text{rel}} = \pm \frac{0,6\text{V}}{45\text{V}} \cdot 100\% = \pm 1,3\%$$

#### 4.4.2 Fehler aus der Differenz zweier Messgrößen

27.11.2009



$$U_{BE} = U_B - U_{RE}$$

$$U_{Bw} = U_{B_A} \pm \Delta U_B$$

$$U_{REw} = U_{RE_A} \pm \Delta U_{RE}$$

$$U_{BEw} = U_{Bw} - U_{REw}$$

$$U_{BEw} = U_{B_A} \pm \Delta U_B - (U_{RE_A} \pm \Delta U_{RE})$$

$$U_{BEw} = U_{B_A} - U_{RE_A} \pm (\Delta U_B \pm \Delta U_{RE})$$

$$F_{\text{ges}} = F_1 + F_2 + \dots$$

Für diese Schaltung werden 2 Messungen vorgenommen. Im Falle a) wird die Spannung  $U_B = 6V$  und  $U_{BE} = 5,3V$  im 10V-Messbereich gemessen. Im Falle b) wird  $U_{BE} = 0,7V$  direkt im 3V-Messbereich gemessen. In beiden Fällen haben die Messinstrumente die Klasse 1,0. Berechnen Sie für die Fälle a) und b) die absoluten und relativen Fehler.

$$a) F = \pm 10V \cdot 1\% = 0,1V$$

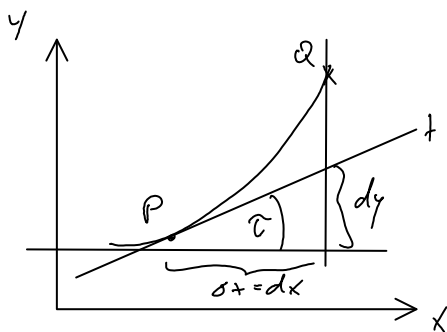
$$F_{\text{sec}} = \pm 0,2V$$

$$F_{\text{rel}} = \pm \frac{0,2V}{0,7V} \cdot 100\% = \pm 28,57\%$$

$$b) F = \pm 3V \cdot 1\% = \pm 0,03V$$

$$F_{\text{rel}} = \pm \frac{0,03V}{0,7V} \cdot 100\% = 4,28\%$$

#### 4.4.3. Allgemeines Gesetz zur Berechnung von Fehlern durch Fehlerfortpflanzung



$$f'(x) = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Ändert sich  $x$  um  $\Delta x$ , dann ändert sich immer  $y$  um  $\Delta y$ . Ist  $\Delta x$  sehr klein, dann ist auch  $\Delta y$  sehr klein und man kann näherungsweise sagen:  $\Delta y \approx dy$  bzw.  $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$ .  
Hängt von einem gemessenen Wert  $x$  eine andere Größe durch die Beziehung  $y=f(x)$  ab, so führt jeder Fehler  $\Delta x$  auch zu einem Fehler  $\Delta y$  der zu messenden Größe. Wie das gilt dann:  $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$  (absoluter Fehler) und

$$F_{\text{rel}} = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)} \quad (\text{relativer Messfehler})$$

Bestimmen Sie den absoluten, relativen Messfehler, der sich bei der Berechnung des Querschnitts eines Kreiszyllinders ergibt. Der Durchmesser wurde mit  $x = 50\text{mm}$  gemessen und der abs. Messfehler  $\Delta x$  betrug  $\pm 0,1\text{mm}$ .

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad f'(x) = x \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$F = f'(x) \cdot \Delta x = \frac{\pi}{2} x \Delta x$$

$$F = \frac{\pi}{2} \cdot 50\text{mm} \cdot 0,1\text{mm} = 2,5\pi \text{mm}^2 = 7,85 \text{mm}^2$$

$$F_{\text{rel}} = \pm \frac{\frac{\pi}{2} x \cdot \Delta x}{\frac{\pi}{4} x^2} \cdot 100\% = \pm \frac{2}{x} \cdot \Delta x \cdot 100\% = \pm \frac{2 \cdot 0,1\text{mm}}{50\text{mm}} \cdot 100\% = \pm 0,4\%$$

Einzelmeßwerte:

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots) = y$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_3} \Delta x_3 \right| + \dots$$

Vergl. vorhergehendes Beispiel:

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = 15V, \quad U_2 = 30V, \quad \text{Messbereich } 0-30V, \quad \text{Klasse } 1,0$$

$$y = f(x) = U_1 + U_2$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial U_1} \cdot \Delta U_1 \right| + \left| \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial U_2} \cdot \Delta U_2 \right|$$

$$\Delta y = (1+0) \Delta U_1 + (0+1) \Delta U_2$$

$$\Delta y = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

z.B. Leistungsmessung:

$$P = U \cdot I, \quad \text{Klasse } 1,0, \quad \text{MB } 0-30V$$

$$\text{MB } 0-1A$$

$$U = 20V \quad I = 0,8A$$

11.12.2009

Bei einer Leistungsmessung wurde die Spannung  $U = 20V$  und  $I = 0,8A$  gemessen. In beiden Fällen war die Klassengenauigkeit der Instrumente  $1,0$  und die Messbereiche waren  $30V$  und  $1A$ . Bestimmen Sie den absoluten und relativen Meßfehler.

$$P = U \cdot I \quad P = 20V \cdot 0,8A = 16W$$

$$\Delta P = \left| \frac{\partial (U \cdot I)}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial (U \cdot I)}{\partial I} \Delta I \right|$$

$$\Delta P = |1 \cdot \Delta U| + |U \cdot \Delta I|$$

$$\Delta U = \pm 30V \cdot 1\% = \pm 0,3V$$

$$\Delta I = \pm 1A \cdot 1\% = \pm 0,01A$$

$$\Delta P = |0,8A \cdot 0,3V| + |20V \cdot 0,01A|$$

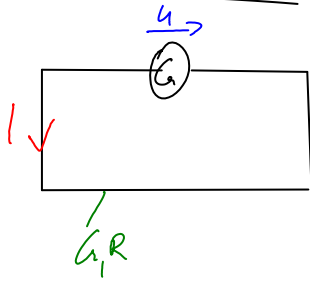
$$\Delta P = 0,24W + 0,2W = 0,44W$$

$$F_{r,m} = \pm \frac{0,44W}{16W} \cdot 100\% = \pm \frac{0,44}{16} \cdot 100\% = \pm 2,75\%$$

# 5. Messinstrumente

## 5.1 Grundbegriffe des mag. Kreises

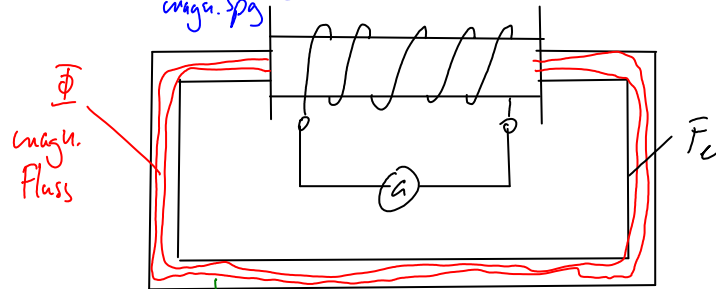
Elektr. Stromkreis



$$I = U \cdot G$$

$$G = \frac{\kappa \cdot A}{l}$$

$\odot$  = Durchflutung mag. Spg  
Magnet. Kreis



$\lambda, R_m$   
mag. Leitwert mag. Widerstand

$$\Phi = \odot \cdot \lambda$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot A_{Fc}}{l_m}$$