Lösungen zu den Übungen

[3.1]

a) $v_0^{(1)} = 7{,}9 \, km/s$

b) $v_0^{(2)} = 31600 \, km/s \sim \frac{1}{10} c$

c) $t_{BigBang} \approx 20{,}1 \times 10^9 a$

d) $x \approx 1{,}9 \times 10^{23} \, km$

[3.2] $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$v(t) = v_0 + a \cdot t$

a) $v_0 = 0 \, km/h$

$v(10s) = 80 \, m/s$

b) $x(10s) = 50m + \frac{1}{2} \cdot 8 \, \frac{m}{s^2} \cdot (10)^2 s^2 = 450m$

c) $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{400m}{10s} = 40 \frac{m}{s}$

[3.3] $\boxed{a(t) = g \cdot e^{-bt}}$

Bewegungsgleichung $x(t) = ?$

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \overset{!}{=} g \cdot e^{-bt}$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{dt'} \cdot dt' = \int_{t_0}^{t} g \cdot e^{-bt'} dt'$

$v(t) - v_0 = \frac{g}{-b} e^{-bt'} \Big|_0^t = + \frac{g}{b} (1 - e^{-bt})$

$\underline{v_0 = 0}$ $\boxed{v(t) = \frac{g}{b} \cdot (1 - e^{-bt})}$

$t \to \infty \to v(t \to \infty) \to \frac{g}{b} = const$

v_{End}

$x(t) = \int_{x_0=0}^{t} \frac{dx(t)}{dt} dt = \int v dt = \int \frac{dx}{dt'} dt' = \int_{t_0}^{t} v_{end} (1 - e^{-bt'}) dt'$

$= v_{end} t - \frac{v_{end}}{b} \cdot (1 - e^{-bt})$

[3.4] 3 Phasen

1) $0 \leq t \leq 25s$
Bew. mit konst. Beschl.

2) 25s bis erreichen des Scheitelpkts
Bew. mit $a = -g = const$

3) Vom Scheitel bis crash

a) $h = \Delta x_1 + \Delta x_2$
Strecke in Phase 1 Strecke in Phase 2

Koord. 1-dim Bew $x = 0$ Startrampe
$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$
$x_0 = 0 , \; v_0 = 0$
$\Delta x_1 = x(25s) = \frac{a}{2} t^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \frac{m}{s^2} \cdot (25)^2 s^2 = 7812{,}5m$ ($20\frac{m}{s^2}$; 6250 m)

$v_{end} = a_1 \cdot t = 500 \, m/s$ mit $a = 20 \frac{m}{s}$ weitergerechnet

Halten: Eliminiert man t aus $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$v(t) = v_0 + a \cdot t$

$$\rightsquigarrow \underline{v^2} = v_0^2 + 2a \underline{\Delta x}$$

$\Rightarrow \Delta x_2 = 1{,}27 \cdot 10^4 m$

$\underline{h = 19km}$

Flugzeit: $t_g = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 25s + \Delta t_2 + \Delta t_3$

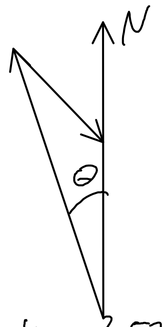
$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\langle v_2 \rangle} = \frac{1{,}27 \cdot 10^4 m}{1/2 \, (v_1 + v_{End})} = 51s$$

3. Phase: Vom Scheitel (h) $\longrightarrow$ $x = 0$ freier Fall
$\rightarrow \Delta x_3 = -\frac{1}{2} g \cdot (\Delta t_3)^2$
h "

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\Delta x_3}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-1{,}9 \cdot 10^4 m)}{-9{,}81 \, m/s^2}} = 62{,}2s$$

$t_{ges} = 2min + 18s$ $\qquad v_{crash} = -g \cdot \Delta t_3 = \underline{-610 \; m/s}$

[3.5] $\Theta = 8{,}47^\circ$



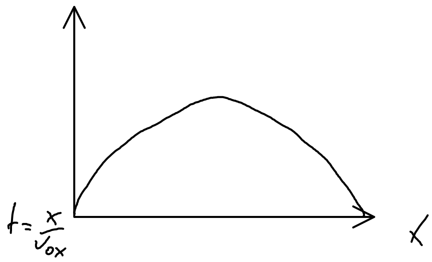
$t_F = 2{,}57\,h$

[3.6] $\Theta_0 = 45^\circ$

$v_0 = 300\,m/s$

Schiefer Wurf

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ x(t) &= v_{0x}\cdot t \end{aligned}}$$



Elimination von t

$$\boxed{y(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}\cdot x^2}$$

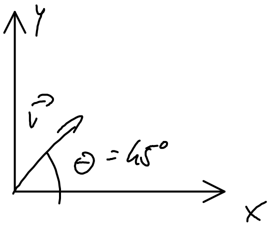
Max: Bilde $\frac{dy}{dx} \overset{!}{=} 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}\cdot x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g/v_{0x}^2 < 0$$

$$x_{max} = \frac{v_{0x}\cdot v_{0y}}{g}$$

$$\boxed{y(x_{max}) = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}}$$

Werte einsetzen



$$v_{0y} = |\vec{v_0}|\cdot\sin\Theta_0$$
$$= 300\,m/s\cdot\sin 45^\circ = 212\,m/s$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{(212)^2\,m^2/s^2}{2\cdot 9{,}81\,m/s^2} \cong 2{,}3\,km$$

Flugdauer: $\underset{\overset{!}{=}\,0}{y(t)} = \underset{\overset{!}{=}\,0}{y_0} + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$0 \overset{!}{=} v_{0,y} t' - \frac{1}{2} g t'^2$

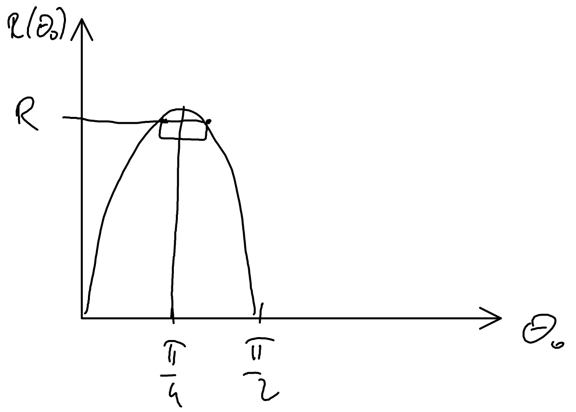
$\rightarrow t' = 0$ (Start), $t' = \frac{2 v_{0,y}}{g} = 43{,}2\,s$

c) $R = x(t') = v_{0,x} \cdot t' = |v| \cdot \cos 45° \cdot 43{,}2 = 9{,}16\,km$

[3.7] $R(45° \pm \theta) = \frac{|\vec{v_0}|^2}{g} \cdot \sin(90° \pm 2\theta) = \frac{|\vec{v_0}|^2}{g} \cos(\pm 2\theta)$

weil $\cos x = \cos(-x)$

$\Rightarrow R(45° + \theta) = R(45° - \theta)$



<u>Bsp.:</u> <u>Schiefer Wurf</u>

Heli → Floß 100 m über Floß

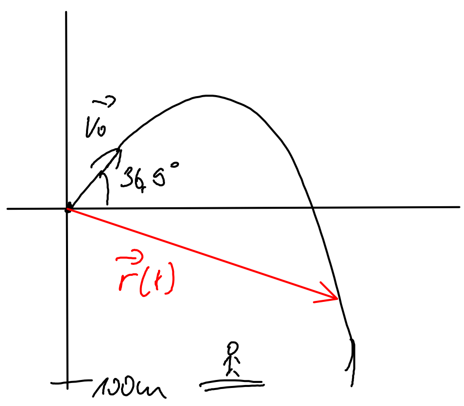
Heli → steigt mit 25 m/s unter 36,9°

Abwurf Care-Paket

a) Wie lange ist Paket in der Luft?

b) Entfernung vom Floß trifft Paket auf?

c) v_0 ist Heli?



a) $y_0 = 0 \qquad y(t) = v_{0,y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

Nach t auflösen:

$$t^2 - \frac{2 v_{0,y} \cdot t}{g} + \frac{2 y(t)}{g} = 0 \qquad t_{1/2} = \frac{v_{0,y}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{0,y}^2}{g^2} - \frac{2y}{g}}$$

20.10.2009

$v_{0,y} = |\vec{v}_0| \cdot \sin\Theta_0 = 25\,m/s \cdot \sin 36{,}9° = 15\,m/s$

Einsetzen: $t_1 = -3{,}24\,s$ ← Mumpitz

$t_2 = 6{,}3\,s$ ← Paket wird zur Zeit $t=0$ abgeworfen.

$$x(t) = |\vec{v}_0| \cdot \cos\Theta_0 \cdot t$$
$$= 20\,m/s \cdot 6{,}3\,s \approx 126\,m$$

Bewegl. Heli $|\vec{v}| = 25\,m/s$

$\Theta = 36{,}5°$

$x(t) = v_{0x} \cdot t$

$y(t) = v_{0y} \cdot t$

$\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot t$

$x(6{,}3s) = 20\,m/s \cdot 6{,}3\,s = 126\,m$

$y(6{,}3s) = 15\,m/s \cdot 6{,}3\,s = 94{,}5\,m$

$\Rightarrow$ Heli steht direkt über Aufschlagort des Paketes in Höhe von $\underline{194{,}5\,m}$

08.12.2009

[8.15]: $x(t) = c e^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}$

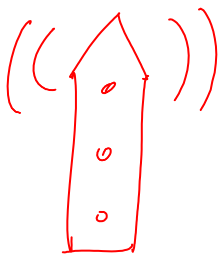
$c = \underline{a} + i\underline{b}$

$x(0) = x_0\,,\ v(0) = 0$

$\dot{x}(t) = i\omega \left(c e^{i\omega t} - c^* e^{-i\omega t}\right)$

$\dot{x}(0) = v(0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c - c^* = a + ib - a + ib \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{b = 0}}$



$x(0) = c + c^* = a + ib + a - ib$

$= 2a \overset{!}{=} x_0 \Rightarrow \quad a = \frac{x_0}{2}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$

$\underline{= x_0 \cos\omega t}$

Analog: $x(0) = 0$

$\dot{x}(0) = v_0$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t}$$

$x(0) = x_0$

$v(0) = v_0$

[8.16]: $x(t) = 7cm \cos\left(6\pi/s\right)\cdot t$

$x(t) = A \cdot \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

A: Amplitude

ω_0: Kreisf.

φ: Phase (hier 0)

Frequenz $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(6\pi)/s}{2\pi} = 3Hz$

Schwingungsdauer $T = \frac{1}{\nu} = 0{,}\bar{3}\,s$

Amplitude: $A = 7cm$

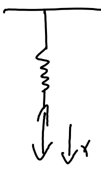
Ruhelage: $x = 0 \Leftrightarrow \cos\omega_0 t_R = 0$

$\rightarrow \omega_0 t_R = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow t_R = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2(6\pi)s^{-1}} = 0{,}0833\,s$

$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -\left(42\pi\,\frac{cm}{s}\right)\sin 6\pi/s \cdot t$

$v(t_{x=0}) = v(0{,}083..)$



$= -\left(42\pi\,\frac{cm}{s}\right)\cdot\sin\left(6\pi\cdot 0{,}0833..\right) < 0$

[8.17]

Maximale Geschwindigkeit

$x(t) = A\cdot\cos\omega_0 t \qquad (\varphi = 0)$

$v(t) = -A\,\omega_0 \sin\omega_0 t$

$v_{max.} \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} \overset{!}{=} 0$

$\frac{dv}{dt} = -A\,\omega_0^2\cos\omega_0 t \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{2\omega_0}$

$v_{max} = v\left(\frac{\pi}{2\omega_0}\right) = 1{,}32\,m/s$

$a_{max} = 24{,}9\,m/s^2$

Klausur

Begriffe: Newton. Ax.

Inertialsystem

Bewegungsgleichungen

Rakete Assm Herti

freier Fall, Parabel

Kreisbewegungen

Schwingungen

gedämpfte

erzwungene

Fourier

keine Herleitungen

Zentrifugalkraft

- **Übung 8.21**
  Ein 2 kg schwerer Gegenstand schwingt mit einer Anfangsamplitude von 3 cm an einer Feder mit Federkonstante $D = 400$ N/m. Man ermittle
  (a) die Schwingungsdauer
  (b) die gesamte Anfangsenergie
  (c) die Dämpfungskonstante und
  (d) den Q-Faktor, wenn die Energie um 1 % pro Periode abnimmt.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2\,\mathrm{kg}}{400\,\mathrm{N/m}}} = 0{,}444\,\mathrm{s}$$

Anfangsenergie

$$E_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} m \frac{D}{m} A^2 = \frac{1}{2} D A^2$$

$$= \frac{1}{2}(400\,\mathrm{N/m})(0{,}03\,\mathrm{m})^2 = 0{,}18\,\mathrm{J}$$

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{Per.} = 0{,}01$$

$$Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{Per.}} = 2\pi/0{,}01 = 628$$

wegen $Q = \omega_0 \frac{m}{b}$

$$\rightarrow b = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{2\pi}{T}\frac{m}{Q} = 0{,}045\,\mathrm{kg/s}$$

$2\gamma = \frac{b}{m}$

$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{0{,}045\ kg/s}{4\ kg} = 0{,}011\ldots\ 1/s$

8.29)

Nach 1 Periode

$$E_1 = E_0 \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_P\right]$$

Nach 2 Perioden

$$E_2 = E_1 \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_P\right] = E_0 \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_P\right]^2$$

n: $$E_n = E_0 \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{E}\right)\right]^n$$

$$\frac{1}{2} E_0 = E_0 \left[1 - \left(\frac{\Delta E}{E}\right)\right]^n$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}965} = 19{,}5$$

Q-Faktor:

$$Q = \frac{2\pi}{\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_P} = \frac{2\pi}{0{,}035} = 180$$